

## FEUILLE D'EXERCICES SUR LES ESPACES VECTORIELS.

1. Parmi ces ensembles, préciser ceux qui sont des espaces vectoriels et ceux qui n'en sont pas :

- a)  $A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M.X_0 = 0\}$ , où  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- b)  $B = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M.X_0 = X_0\}$ , où  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- c)  $C = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \det(M) = 0\}$ ,
- d) soit  $D = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^t(X_1)M.X_0 = 0\}$ , où  $X_0$  et  $X_1$  sont deux vecteurs non nuls de  $\mathbb{R}^n$ ,
- e)  $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante},
- f)  $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)$  est une suite monotone},
- g) soit  $G = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_n}{n^2} \right) = 0 \right\}$ ,
- h) soit  $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $H = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n).(v_n) = (0)_{n \in \mathbb{N}}\}$ ,
- i)  $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x^2 + 3y^2 - z^2 + 5xy + xz + 2yz = 0\}$

2. Soit  $E$  l'ensemble des applications  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que les restrictions  $f|_{[-1, 0]}$  et  $f|_{[0, 1]}$  soient affines.

1. Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Donner une base de  $E$ .

3. Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique, on considère la droite  $D$  d'équation  $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  et le plan  $P$  d'équation  $x + y + z = 0$ .

1. Montrer que  $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$ .
2. Donner la matrice dans la base canonique de la projection sur  $P$  parallèlement à  $D$ .

4. Soit  $\mathcal{A}$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  stable par produit.

1. Soit  $f \in \mathcal{A}$  non constante. Montrer que  $f$  prend une infinité de valeurs distinctes.
2. Montrer que la famille des fonctions  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est libre.
3. Conclusion ?

5. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $\text{rg}(f^3) = \text{rg}(f^4)$ . Montrer que l'on peut généraliser le résultat, c'est-à-dire que si  $f$  est un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $p$  alors  $\text{rg}(f^p) = \text{rg}(f^{p+1})$

6. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{rg } u = \text{rg } u^2$ .  
Montrer que  $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u$ .

7. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur un corps  $\mathbb{K}$  et  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $u \circ v = 0$  et que  $u + v$  soit inversible. Montrer que  $\text{rg } u + \text{rg } v = n$ .

8. Dans  $\mathbb{R}^4$  on considère :  $a = (1, 2, 3, 4)$ ,  $b = (2, 2, 2, 6)$ ,  $c = (0, 2, 4, 4)$ ,  $d = (1, 0, -1, 2)$  et  $e = (2, 3, 0, 1)$ .  
On pose  $F = \text{Vect}\{a, b, c\}$  et  $G = \text{Vect}\{d, e\}$ . Calculer les dimensions de chacun des sous-espaces  $F$ ,  $G$ ,  $F \cap G$  et  $F + G$  et donner une base pour chacun d'eux.

9. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ .

1. Montrer que, si  $f$  et  $g$  sont nilpotents et commutent, alors  $f + g$  est nilpotent.
2. Montrer les implications suivantes :

$$f \text{ nilpotent} \Rightarrow Id - f \text{ inversible}$$

$$fg \text{ nilpotent} \Rightarrow gf \text{ nilpotent}$$

$$(Id - fg) \text{ inversible} \Rightarrow (Id - gf) \text{ inversible.}$$

10. On considère les trois formes linéaires sur :

$f_1 : (x, y, z) \mapsto 2x - y + 3z$ ,  $f_2 : (x, y, z) \mapsto 3x - 5y + z$  et  $f_3 : (x, y, z) \mapsto 4x - 7y + z$   
forment-elles une base de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  ?

11. Soit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que pour toute forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  il existe une unique matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $f(X) = \text{tr}(AX)$ .  
Montrer que pour avoir en plus  $f(XY) = f(YX)$  pour couple  $(X, Y)$  d'éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , il faut et il suffit que  $A$  soit une matrice scalaire (c'est-à-dire de la forme :  $\lambda I_n$ ).

12. 1) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que  $\text{rg } M = 1$ . Montrer que  $M^2 = (\text{tr } M).M$ .

(Mines 2002)

2) Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  tels que  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = \text{rg}(A + B) = 1$ .

Montrer que :  $\text{tr}(AB) = (\text{tr } A)(\text{tr } B)$ .

13. Trouver l'unique polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à 3, à l'aide des polynômes d'interpolation de Lagrange, qui vérifie :

$$P(0) = -1,$$

$$P(2) = 1,$$

$$P(-2) = 1,$$

$$P(-1) = 2$$

14. Soit  $\zeta_{n,z}$  l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  qui admettent  $z$  pour racine d'ordre  $\geq n$ .

(centrale 2002)

Pour tout polynôme  $A$  de  $\mathbb{C}[X]$  tel que  $z$  ne soit pas racine de  $A$ , on note :

$$M_{n,A} = \{AP \mid P \in \mathbb{C}[X], \deg P \leq n-1\}.$$

Montrer que  $M_{n,A}$  et  $\zeta_{n,z}$  sont supplémentaires.

15. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur le corps  $\mathbb{K}$  et  $f, g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $\text{Im } f + \text{Im } g = \text{Ker } f + \text{Ker } g = E$ . Montrer que les sommes sont directes.

16. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $k$  un entier et  $V_1, \dots, V_k$  des sous-espaces vectoriels de  $V$  tels que  $\sum_{i=1}^k \dim V_i > (k-1)n$ . Montrer que  $\bigcap_{i=1}^k V_i \neq \{0_E\}$

17. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\text{tr}(A) \neq 1$ .

On définit l'ensemble  $E = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid X + {}^t X = 2 \text{tr}(X)A\}$

1. montrer que  $E$  est un espace vectoriel.

2. Déterminer la dimension de  $E$ .

18. Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , résoudre dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

(X-Cachan 2002)

$$1. X = (\text{tr } X)A + B$$

$$2. X + {}^t X = (\text{tr } X)A$$

$$3. \text{tr}({}^t X X) = \text{tr } A$$

19. Soit l'équation  $X + {}^t X = \text{tr } X.A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

(Centrale 2005)

1. Trouver les conditions sur  $A$  pour avoir des solutions à cette équation

$$2. \text{Chercher les solutions pour } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ et pour } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et trouver sa dimension.

20. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , où  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels de dimension finie.

(Centrale 2005)

1. Montrer que pour tout sous espace vectoriel  $A$  de  $E$  :

$$\dim f(A) = \dim A - \dim(A \cap \text{Ker } f)$$

2. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel  $L$  de  $F$  :

$$\dim f^{-1}(L) = \dim E + \dim(L \cap \text{Im } f) - \text{rg } f$$

21. Soit pour tout entier  $k$  de 0 à  $n$  :  $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$ .

1. Montrer que la famille  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. Donner la décomposition de  $Q = \frac{d^n}{dX^n}(X^n(1-X)^n)$  dans cette base.

$$3. \text{En déduire la valeur de } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

22. Montrer que l'application  $\begin{pmatrix} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X^2) + (1+X^2)P(X) \end{pmatrix}$  est linéaire.

Est-elle injective ? Surjective ?

**23.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\Delta : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \\ P & \mapsto P(X+1) - P(X) \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$  et qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\Delta^p = 0$ .

2. En déduire pour tout  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] : \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j) = 0$ .

**24.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A^2$  puis montrer que  $A^2$  est une combinaison linéaire de  $A$  et de  $I_3$ .

En déduire  $A^{-1}$  puis  $A^n$ , où  $n \in \mathbb{Z}$ .

**25.** Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Montrer que tout hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  rencontre  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ .

**26.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  non inversible.

Montrer qu'il existe deux matrices  $B$  et  $C$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que :

$$A = BC, \quad B \text{ inversible}, \quad C \text{ nilpotente}$$

**27.** Soit  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ .

Soit  $M$  la matrice définie par blocs, égale à  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $M$  est inversible si et seulement si  $A$  et  $C$  sont inversibles.

2. Lorsque  $A$  et  $C$  sont inversibles, exprimer  $M^{-1}$  sous forme de blocs.

**28.** Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  et  $\Phi_{A,B} : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & A M B \end{pmatrix}$ .

(X-ENS 2023)

1. Quel est le rang de  $\Phi_{A,B}$  ?

2. Soit  $L : M \mapsto \text{tr}(M) I_n$ . Existe-t-il un couple  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  tel que  $L = \Phi_{A,B}$  ?

**29.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Soit  $f$  un automorphisme de  $E$ .

(X-ENS 2023)

Montrer l'équivalence des assertions suivantes

i) Il existe  $F, G$  sous-espaces vectoriels de  $E$  tel que  $F \oplus G = E$  et  $\begin{cases} f(F) \subset G \\ f(G) \subset F \end{cases}$

ii)  $\exists (u, v) \in \mathcal{L}(E) / f = u + v$  et  $u^2 = v^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$

**30.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

(Centrale 2023)

1. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que :  $\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$ .

2. Montrer que la suite  $(\dim(\text{Ker}(u^k)))_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite constante à partir d'un certain rang (on note  $d$  la constante).

3. (a) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $\text{Ker}(u^p) = \text{Ker}(u^{p+1})$ .

Montrer que  $\forall k \geq p$ ,  $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^p)$ .

(b) Soit  $k_u = \inf\{k \in \mathbb{N} / \dim(\text{Ker}(u^k)) = d\}$ .

Montrer que  $k_u \leq n$ .

**31.** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ .

Soit  $u$  et  $v$  deux symétries telles que  $u \circ v = -v \circ u$ .

(Centrale 2023)

1. Montrer que  $n$  est pair.

2. Soit  $F^+ = \text{Ker}(u - Id_E)$  et  $F^- = \text{Ker}(u + Id_E)$ .

Montrer que  $v(F^+) = F^-$  et  $v(F^-) = F^+$ .

3. Montrer l'existence d'un base  $\mathcal{B}$  telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_{n-p} & 0 \end{pmatrix}$$