Feuille d'exercices sur le calcul différentiel.

1. Continuité et caractère $\mathscr{C}^1$ de f :

a) $f = \dfrac{\sin x^2 + \sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ b) $g = \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}$ c) $h = (x+y)\sqrt{x^2+y^2}.\sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

d) $f = \dfrac{e^{x^4} - e^{y^4}}{(x^2+y^2)^2}$ e) $g = (x^2+y^2+z^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)$ f) $h = \dfrac{x^3+y^3+z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

2. Calculer les dérivées partielles premières (lorsqu'elles existent) de : :

a) $f(x,y) = \ln(xy)$ b) $g(x,y) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ c) $h(x,y) = x^y$

3. Soit $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction

$$G : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto g(\alpha(x), \beta(x)) \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $a \in \mathbb{R}$, déterminer $G'(a)$.

4. Montrer que l'application $(x,y) \mapsto yx^2 + \cos(x^2+y)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Vérifier sur cet exemple le théorème de Schwarz.

5. Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \\ (0,0) & \mapsto & 0 \end{pmatrix}$, étudier la continuité et le caractère $\mathscr{C}^1$ de f sur $\mathbb{R}^2$, calculer $f''_{xy}(0,0)$ et $f''_{yx}(0,0)$. Conclure.

6. Trouver les extremum des fonctions suivantes :

1. $(x,y) \mapsto (y-x)^2(1-x^2-y^2)$
2. $(x,y) \mapsto \sin x + \sin y + \cos(x+y)$,
3. $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1$
4. $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+(1-y)^2} + \sqrt{y^2+(1-x)^2}$

7. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n. Montrer que $h : \begin{pmatrix} \mathcal{M} & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \det\ X \end{pmatrix}$ admet en tout X de $\mathcal{M}$ une différentielle en X que l'on déterminera.

8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $< . \mid . >$ son produit scalaire.
Montrer que $f : \begin{pmatrix} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle x \mid x \rangle \end{pmatrix}$ admet une différentielle en tout point de E.
En déduire que $x \mapsto \|x\|$ admet une différentielle en tout point de $E \setminus \{0\}$

9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = \frac{1}{x}\int_x^{xy} f(t)\ \mathrm{d}t \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(0,y) = (y-1)\ f(0).$$

Montrer que g est continue et étudier ses dérivées partielles.
Donner une condition suffisante pour g soit de classe $\mathscr{C}^1$.

10. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ si $x \neq y$ et $g(x,x) = f'(x)$

1. Étudier la continuité de g sur $\mathbb{R}^2$.
2. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$, montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$.

11. Soit $f(x,y) = x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$. Extremum globaux et locaux sur $\mathbb{R}^2$. (CCP 2001)

12. On considère la fonction à trois variables : (Centrale 2001)

$$f(x,y,z) = \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{\sqrt{3}}{3}(x+y+z)$$

- Est-ce que f est prolongeable par continuité en $(0,0,0)$?
- Quels sont les extrema locaux de f ?

13. Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$, on considère 3 points A, B, C et 3 réels a, b, c. (Mines 2001)
Soit $\Phi : \begin{pmatrix} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & aAM^2 + bBM^2 + cCM^2 \end{pmatrix}$. Étudier les extremums de Φ.
indication : considérer le barycentre de $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$.

14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $g : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$. On définit le Laplacien de f : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
On définit $g(r,\theta) = f(x,y)$ avec $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ (X-Cachan 2008)

1. Établir l'expression de Δf en fonction des dérivées partielles de g.
2. Déterminer les fonctions $g(r,\theta)$ de la forme $r^n h(\theta)$, $n \in \mathbb{N}$ telles que $\Delta f = 0$.

15. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. de classe $\mathscr{C}^1$. (X-Cachan 2008)
On note $D_j f$ la dérivée partielle de f par rapport à la variable j.
$n \in \mathbb{N}^*$, on pourra supposer si l'on souhaite $n \leqslant 3$.

1. Dans cette question, on a f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ tout entier. On suppose : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ |D_j f| < M$. Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \sqrt{n} M \|x-y\|$.
2. Dans cette question f est définie et continue en 0. On suppose : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ D_j(f)(x) \underset{0}{\longrightarrow} 0$.
   Montrer que f admet une différentielle en 0.
3. On reprend les hypothèses de la question 1 mais sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
   (a) Montrer que si $n \geqslant 2$, f est lipschitzienne.
   (b) Pour quelles valeurs de n est-on assuré d'avoir f continûment différentiable en 0 ?

16. Trouver l'ensemble des fonctions F de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Delta =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ telles que : (Centrale 2008)
$\dfrac{\partial F}{\partial x} + 2\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial F}{\partial y} + F = 0$. On utilisera le changement de variable $x = u$, $y = u^2 v$.

17. Soit $\Phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy - y^2 + y - x \end{pmatrix}$.

1. l'image de toute partie bornée de $\mathbb{R}^2$ est-elle une partie bornée ?
2. l'image de toute partie non bornée de $\mathbb{R}^2$ est-elle une partie non bornée ?
3. Extrema locaux et globaux sur $\mathbb{R}^2$.
4. Extrema locaux et globaux sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$. (Centrale 2008)

18. Soit S la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Donner l'équation du Π_Ω tangent à S au point $\Omega = (1,0,0)$.
2. Déterminer les coordonnées des projetés orthogonaux de O sur les plans tangents à S.

19. Déterminer les points de la surface S d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ dont le plan tangent est parallèle au plan Π d'équation $2x + y - z = 0$.

20. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :
1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + y^3 + x^2$;
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2$

21. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est positivement homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si et seulement si (Mines 2006)

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ f(\lambda x_1,\dots,\lambda.x_n)=\lambda^\alpha f(x_1,\dots,x_n).$$

1. Donner des exemples de fonctions positivement homogènes de degrés -1, 0, $1/2$ et 1.
2. Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Montrer que f positivement homogène de degré α implique que chacune des dérivées partielles de f est positive homogène de degré $\alpha-1$.
3. Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Montrer que f positivement homogène si et seulement si f vérifie l'équation d'Euler :
$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,\dots,x_n)=\alpha.f(x_1,\dots,x_n)$$
indication : introduire $\varphi:\begin{pmatrix}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & f(t.x_1,\dots,t.x_n)\end{pmatrix}$
4. Soit l'équation aux dérivées partielles $x.\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y.\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}$ $(*)$.
   (a) Trouver une solution f_0 de $(*)$ positivement homogène.
   (b) Résoudre $(*)$.

22. On considère l'application

$$f:]0;+\infty[\to\mathbb{R},\quad x\longmapsto f(x)=(x+\ln(x))\,e^{x-1},$$

et l'application

$$F:]0;+\infty[\to\mathbb{R},\quad x\longmapsto F(x)=\int_1^x f(t)\,dt.$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et exprimer $F'(x)$, pour tout $x\in]0;+\infty[$, à l'aide de $f(x)$.

On considère l'application de classe $\mathscr{C}^2$

$$G:]0;+\infty[^2\to\mathbb{R},\quad (x,y)\longmapsto G(x,y)=F(x)+F(y)-2e^{\frac{x+y}{2}}.$$

2. Exprimer les dérivées partielles premières $G'_x(x,y)$ et $G'_y(x,y)$, pour tout $(x,y)\in]0;+\infty[^2$ à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $e^{\frac{x+y}{2}}$.
3. (a) Montrer que f est bijective.
   (b) Établir que, pour tout $(x,y)\in]0;+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si :
$$x=y\quad\text{et}\quad x+\ln x=e.$$
4. Montrer que l'équation $x+\ln x=e$, d'inconnue $x\in]0;+\infty[$ admet une solution et une seule, que l'on notera α, et montrer que : $1<\alpha<e$.
5. Montrer que G admet un extremum local. Préciser sa nature.

23. Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. On considère la courbe du plan $(\mathcal{E})$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point de $\mathcal{E}$ et T_0 la tangente à $\mathcal{E}$ en M_0.
Trouver les points de $\mathcal{E}$ en lesquels la tangente à $\mathcal{E}$ est perpendiculaire à T_0.

24. Déterminer les extrema éventuels des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :
1. $f:(x,y)\mapsto x^2+x^2y+y^3$
2. $g:(x,y)\mapsto xe^y+ye^x$

25. Résoudre l'équation aux dérivées patielles : $2\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$, où f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
<u>indication</u> : on utilisera un changement de variables du type $u=ax+by,\ v=cx+dy$.

26. On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-f=0$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soit g et h deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f:(x,y)\mapsto e^xg(y)+e^{-x}h(y)$ est solution de (E).
2. Déterminer la forme générale des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^2$.