

FEUILLE D'EXERCICES SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en tout point.

L'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

2. Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que l'application $g : (x, y) \mapsto f\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right)$ définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ vérifie $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

3. Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 16\}$, et $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - 3$$

Étudier les extremums de f .

4. Étudier les extremums sur $[0, 1]^2$ de la fonction $f : (x, y) \mapsto 3xy - x^3 - y^3$.

5. Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + xy + y^2 - 2x - y \end{pmatrix}$. Déterminer les extrema relatifs de f . (Centrale 2000)

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^2 + \dots + x_n^2$. Étudier les extremums de f sur l'ensemble K défini par :

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \geq 0 \text{ et } x_1 + \dots + x_n = 1\}$$

7. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*2}$ par $(x, y) \mapsto \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ a un unique extremum et déterminer la nature de ce dernier.

8. Étudier les extremums relatifs des fonctions :

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (x - y)^2 + x^3 + y^3 \end{pmatrix} \text{ et } g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (x - y)^2 + x^4 + y^4 \end{pmatrix}$$

9. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ab \neq 1$, exprimer $\text{Arctan } a + \text{Arctan } b$ en fonction de $\text{Arctan } \frac{a+b}{1-ab}$

10. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$1. \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2)} \quad 2. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1 + x.$$

11. Avec le changement de variable $\begin{cases} u = 2x + 3y \\ v = x + y \end{cases}$, trouver les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$3 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

12. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$. On recherche toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x, y) \in D, x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (E)$$

1. Vérifier que $\varphi : (x, y) \mapsto \frac{y}{x}$ est solution du problème.

2. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que $g \circ \varphi$ est solution de (E) .

3. Soit f une solution, montrer alors que $f(u, uv)$ ne dépend que de v .

4. Donner l'ensemble des solutions.

13. Soit une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions :

(ENSEA 2000)

(i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

(ii) Pour tout rectangle $ABCD$ dont les côtés sont parallèles aux axes : $f(B) - f(A) + f(D) - f(C) = 0$

14. Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormal, on donne les points $A(1, 0)$, $B(2, 0)$ et $C(0, 3)$. Trouver les droites $\mathcal{D}$ du plan telles que : $d(A, \mathcal{D})^2 + d(B, \mathcal{D})^2 + d(C, \mathcal{D})^2$ soit minimale.

15. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y \text{ et } f'(x) \text{ sinon} \end{pmatrix}$.

(X-Cachan 2002)

Montrer que F est $\mathcal{C}^1$.

16. Montrer que $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} & \rightarrow & \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \\ (x, y) & \mapsto & \left(xy, \frac{y}{x}\right) \end{pmatrix}$

1. Montrer que φ est bijective.

2. Résoudre $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ avec le changement de variable précédent.

(ENSAM 2002)

17. En passant en coordonnées polaires, trouver les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifiant :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x.$$

18. Soit $\varphi : \begin{pmatrix} [-1, 1]^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \int_{-1}^1 |t - x| |t - y| dt \end{pmatrix}$ et $\mu = \min_{(x, y) \in [-1, 1]^2} \varphi(x, y)$.

1. φ est-elle lipschitzienne ? Pourquoi μ existe-t-il ?

2. Sur $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq y \leq 1\}$, montrer que φ est polynomiale, la calculer.

3. Trouver μ et le nombre de points en lesquels ce minimum est atteint. (il est demandé de dessiner les domaines)

(X-Cachan 2006)

19. Soit $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$, $f(x, y, z) = (xy + yz + xz)^{\frac{3}{2}}$ et $g(x, y, z) = xyz$.

1. Soit $(x, y, z) \in U$ tel que $g(x, y, z) = 1$ et $f(x, y, z) \leq M^{\frac{3}{2}}$. Montrer que $\frac{1}{M} \leq x \leq M^2$ et de même pour y et z .

2. Justifier que $\min_{\substack{(x, y, z) \in U \\ g(x, y, z) = 1}} f(x, y, z)$ est atteint.

Soit P_0 le point de U en lequel le minimum précédent est atteint. Montrer que $\min_{(x, y, z) \in U} \frac{f(x, y, z)}{g(x, y, z)}$ y est aussi atteint.

3. Soit $X_1 = \begin{pmatrix} y_0 + z_0 \\ x_0 + z_0 \\ y_0 + x_0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} y_0 \cdot z_0 \\ x_0 \cdot z_0 \\ y_0 \cdot x_0 \end{pmatrix}$ avec $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Montrer que X_1 et X_2 sont colinéaires. En déduire P_0 .

4. Justifier l'existence de $C > 0$ tel que $g(x, y, z) \leq C f(x, y, z)$. Discuter du cas d'égalité. (X-Cachan 2006)

20. Donner les équations des plans tangents à la surface S d'équation cartésienne $xy = z^3$, contenant la droite D d'équations $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$.

21. Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{yx^3}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{pmatrix}$

(Mines 2018)

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- 22.** Soit $K = [0, 1]^2$. Soit $f : (x, y) \mapsto \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$. (Mines 2018)
Existence et calcul des extrema de f sur K .
- 23.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel. (Mines 2018)
L'endomorphisme f est symétrique à valeurs propres strictement positives.
1. Montrer que $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle x | f(x) \rangle > 0$.
 2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $g : x \mapsto \frac{1}{2} \langle x | f(x) \rangle - \langle x | u \rangle$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
 3. Montrer que g admet un minimum global.
 4. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que g admette un maximum global.
- 24.** (X) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle \nabla f(x) - \nabla f(y) | x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$ avec $\alpha > 0$. (X 2018)
1. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x) | y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2$.
 2. f admet-elle un minimum global? Ce minimum est-il unique?
 3. Soit $\Phi : (x, t) \mapsto f(x + t \nabla f(x))$.
À x fixé, Φ admet-elle un ou des minimum(s) globaux par rapport à t ?
- 25.** (X) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), B \in \mathbb{R}^n$ et $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \frac{1}{2} {}^t X A X - {}^t B X \end{pmatrix}$. (X 2017)
1. Montrer que f admet un minimum si et seulement si $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et $B \in \text{Im}(A)$.
- Pour $i \in \{1, 2\}$ soient $A_i \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), B_i \in \mathbb{R}^n$ et $f_i : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \frac{1}{2} {}^t X A_i X - {}^t B_i X \end{pmatrix}$
2. Calculer $\nabla f_i(X)$.
 3. On suppose que f_1 et f_2 possèdent un minimum.
Montrer que la condition $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|\nabla f_1(X)\| = \|\nabla f_2(X)\|$ entraîne $f_1 = f_2$.
- 26.** On note C l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telles que (X-ENS 2017)
- $$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda \vec{x} + (1 - \lambda) \vec{y}) \leq \lambda f(\vec{x}) + (1 - \lambda) f(\vec{y}).$$
1. On suppose $f \in C$ de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
Montrer que : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle \nabla f(\vec{x}) | \vec{y} - \vec{x} \rangle \leq f(\vec{y}) - f(\vec{x})$.
 2. On définit pour $f \in C$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n : Df(\vec{x}) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n / \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \vec{u} | \vec{y} - \vec{x} \rangle \leq f(\vec{y}) - f(\vec{x})\}$.
 - (a) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\vec{x}$, montrer que $Df(\vec{x}) = \{\nabla f(\vec{x})\}$
 - (b) On suppose $f : \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|$.
Montrer que $f \in C$ et déterminer $Df(\vec{x})$.
 - (c) Retour au cas général : soit $f \in C / \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $Df(\vec{x}) \neq \emptyset$.
Montrer que $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{u}) - f(\vec{x})}{t}$ existe et est finie.
- 27.** Soit l'application f définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 2(x + y)^2$. (Centrale 2017)
Soit l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 2 \text{ et } -2 \leq y \leq 2\}$.
1. Montrer que f admet des extrema sur A .
 2. Les étudier
 3. On pose $g(x) = f(x, x)$ et $h(x) = f(x, -x)$.
Exprimer g' et h' en fonction des dérivées partielles de f .