FEUILLE D'EXERCICES SUR LES DÉTERMINANTS.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \beta_{ij}$ définie par $\beta_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$. Comparer $\det(B)$ et $\det(A)$.

2. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f : x \mapsto \det(A+xB)$. Prouver que f est une fonction polynôme sur $\mathbb{K}$, préciser son degré, son coefficient dominant, son terme constant dans le cas où B et une matrice inversible.

3. Calculer les déterminants suivants, en les factorisant autant que faire se peut :

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a+b & a^3+b^3 \\ 1 & b+c & b^3+c^3 \\ 1 & c+a & c^3+a^3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & x & b & c \\ x & a & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & z^2+x^2 \\ x^3+y^3 & y^3+z^3 & z^3+x^3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ a+b & -2b & c+b \\ a+c & c+b & -2c \end{vmatrix}$$

4. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, \pi[^3$, prouver que : $(\alpha+\beta+\gamma = \pi) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \tan\frac{\alpha}{2} \\ 1 & \cos\beta & \tan\frac{\beta}{2} \\ 1 & \cos\gamma & \tan\frac{\gamma}{2} \end{vmatrix} = 0$

5. Soit l'équation dans $\mathbb{C}$: $x^3 - A.x^2 + B.x - C = 0$ et α, β, γ ses racines.

Exprimer en fonction de A, B, C : $\Delta = \begin{vmatrix} (\beta+\gamma)^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^2 & (\alpha+\gamma)^2 & \gamma^2 \\ \alpha^2 & \beta^2 & (\alpha+\beta)^2 \end{vmatrix}$

6. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}.J.P = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$

En déduire $\mathrm{Dét}(\alpha \mathrm{I_n} + \beta \mathrm{J})$.

7. Résoudre $\begin{vmatrix} -1 & z & & 0 \\ 1-z & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & z \\ 0 & & 1-z & -1 \end{vmatrix} = 0.$ (Mines 2009)

8. Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. On note $\varphi(h) = \begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 1 & f(a+h) & f(a+2h) \\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h) \end{vmatrix}$. Déterminer : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varphi(h)}{h^4}$.

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose A inversible. Prouver que $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ ssi $\det(A) = \pm 1$.

10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prouver que $\operatorname{rg} A = n$ ssi $\operatorname{rg} \operatorname{Com} A = n$; puis que $\operatorname{rg} A < n-1$ ssi $\operatorname{Com} A = 0$. Déterminer $\operatorname{rg} \operatorname{Com} A$ lorsque $\operatorname{rg} A = n-1$.

11. Exprimer $\det \operatorname{Com} A$ en fonction de $\det A$, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

12. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13. Calculer le déterminant de la matrice $M_n = (a_{i,j})$ définie par $a_{i,j} = \min\{i, j\}$.

14. Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2a+3 & 3a^2+4a & 4a^3+5a^2 \\ 1 & 2b+3 & 3b^2+4b & 4b^3+5b^2 \\ 1 & 2c+3 & 3c^2+4c & 4c^3+5c^2 \\ 1 & 2d+3 & 3d^2+4d & 4d^3+5d^2 \end{pmatrix}$.

15. Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \dots & & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \dots & & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_1 & a_2 & \dots & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix}$

16. Résoudre suivant la valeur de $a \in \mathbb{C}$, le système :

$$\begin{cases} ax - 2y + 2z & = 4 \\ x - ay + 3z & = -2 \\ 5x - 8y + 12az & = 8 \end{cases}$$

17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $C = \begin{pmatrix} A & iB \\ iB & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Montrer que $\det C \in \mathbb{R}^+$. (ENSAM 2001)

18. Soit $A_n = [a_{j,l}]$ avec $a_{j,l} = e^{\frac{2i\pi jl}{n}}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant n$.
Calculer les coefficients de $A_n.\overline{A_n}$.
Déterminer :
. l'inverse de A_n (pourquoi est-elle inversible ?)
. $|\det A_n|$. (ENSI 2001)

19. Soit le système :

$$\begin{cases} a.x_1 - x_2 & = 0 \\ \dots & \\ -x_{p-1} + a.x_p - x_{p+1} & = 0, \quad \forall p \in [2, n-1] \\ \dots & \\ -x_{n-1} + a.x_n & = 0 \end{cases}$$

- Calculer le déterminant (on pourra utiliser une formule de récurrence).
- Déterminer a tel que la solution nulle ne soit pas la seule solution du système.
- Pour les valeurs de a déterminées à la question précédente, quelles sont les solutions ? (Mines 2005)

20. Soit $D_n(X) = \begin{vmatrix} 1+X^2 & X & 0 & \dots & \dots & 0 \\ X & 1+X^2 & X & \ddots & & \vdots \\ 0 & X & 1+X^2 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & X & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & 0 & \dots & 0 & X & 1+X^2 \end{vmatrix}$.

1. Montrer que D_n est un polynôme en X,
2. Déterminer le degré de D_n,
3. Calculer D_n. (Mines 2010)

21. Soit A matrice 2-2 de déterminant nul. (Mines 2014)
Trouver des conditions sur $\mathrm{tr}(A)$ pour qu'il existe X vecteur tel que $(A^n\,X)$ soit une suite non bornée ?

22. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}$. (Mines 2013)

1. À quelles conditions la matrice A est-elle inversible ?
2. Inverser la matrice A dans ce cas.

23. Soit $M = (m_{ij})$, avec i, j variant de 0 à n, et $m_{ij} = (a_i + b_j)^n$, les a_i et b_j étant $n+1$ réels.
Calculer le déterminant de M en fonction de n, des a_i et des b_j. (Mines 2015)