FEUILLE D'EXERCICES SUR LES DÉTERMINANTS.

1. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} \text{ où } j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \sin a & \sin 2a & \sin 3a \\ \sin b & \sin 2b & \sin 3b \\ \sin c & \sin 2c & \sin 3c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \\ 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 \\ 4a^3 & 3a^2 & 2a & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \end{vmatrix}$$

2. Étant donné a et b scalaires, calculer le déterminant $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $A = (C_1, \dots, C_n)$, où les C_i sont les colonnes de A.

On pose $B = (D_1, \dots, D_n)$, avec $D_j = \displaystyle\sum_{i \neq j} C_i$.

Quelle relation existe-t-il entre $\det A$ et $\det B$?

4. Calculer le déterminant de la matrice $A = (1 + a_i^j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\varphi : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de φ.

6. Calculer les déterminants d'ordre n suivants :

$$\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \dots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & a+b & b \\ 0 & \dots & 0 & a & a+b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \left| \big(\sin(a_i + a_j) \big)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n} \right|$$

7. **1)** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(P,Q) \in (\mathbb{C}_n[X] \setminus \{0\})^2$.

Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) P et Q ont au moins une racine commune

(ii) $\exists (U,V) \in (\mathbb{C}_{n-1}[X])^2 \setminus \{(0,0)\})$ tels que $UP+VQ=0$ avec $\deg U < \deg Q$ et $\deg V < \deg P$.

2) Soient $A = aX^2+bX+c$ et $B = dX^2+eX+f$ fixés dans $(\mathbb{C}_2[X])^2$ et $\varphi : \begin{pmatrix} (\mathbb{C}_1[X])^2 & \to & \mathbb{C}_3[X] \\ (U,V) & \mapsto & UA+VB \end{pmatrix}$.

Montrer que φ est linéaire et écrire sa matrice dans des bases à choisir.

3) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A et B aient au moins une racine commune.

8. Résoudre et discuter les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} ax+ & by+ & z=1 \\ x+ & aby+ & z=1 \\ x+ & by+ & az=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax+ & by & + & 2z & = & 1 \\ ax+ & (2b-1)y & + & 3z & = & 1 \\ ax+ & by & +(b+3)z & & = & 2b-1 \end{cases}$$

9. En calculant le produit $\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{vmatrix}$

Établir l'égalité d'Euler :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2) = (ax+by+cz+dt)^2 + (ay-bx+ct-dz)^2 \\ +(az-bt-cx+dy)^2 + (at+bz-cy-dx)^2$$

10. Soient $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n$, $(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{C}^n$. (CCP 2008)

Soit $D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & \ldots & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ x_iy_1 & x_iy_2 & \ldots & 1+x_iy_i & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ x_ny_1 & & & & & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

Calculer ce déterminant.

On calculera d'abord pour $n=2$ et $n=3$; on utilisera la propriété de n-linéarité du déterminant.

11. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ b_1 & a_1 & \ldots & \ldots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer $\det A$. (Centrale 2002)

12. Trouver le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \tan(a/2) \\ 1 & \cos(b) & \tan(b/2) \\ 1 & \cos(c) & \tan(c/2) \end{pmatrix}$ (Mines 2002)

13. Soit le système d'équations $\begin{cases} ax_1 - x_2 = 0 \\ -x_p + ax_{p+1} - x_{p+2} = 0 \ \forall p \in [\![1, n-2]\!] \\ -x_{n-1} + ax_n = 0 \end{cases}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

- Calculer le déterminant Δ_n du système.
- Donner les valeurs de a pour lesquelles le système admet une solution non nulle,
- Expliciter la solution dans ce cas. (Mines 2005)