Feuille d'exercices sur les équations différentielles.

1. Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

a) $(1-t^2)y' - t.y = \dfrac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$

b) $y'' + y = t^2 \cos t$

c) $(t^2-1)y'' - 12y = 0$ (sachant qu'il existe un polynôme solution),

d) $(t^2+1)y'' - (2t+1)y' + 2y = 0$ (sachant qu'il existe un polynôme solution),

e) $(1+t^2)y'' + ty' = 1 + t.\operatorname{Arctan}\ t$

f) $(t-y^2) + 2t.y.y' = 0$

g) $4(t-t^2)y'' - 2y' - y = 0$ (sachant que $t \to \sqrt{t-1}$ est solution),

2. Trouver toutes les solutions y de classe $\mathcal{C}^2$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :

$$x(x^2+1)y'' - 2(x^2+1)y' + 2xy = 0$$

(chercher des solutions sous forme de polynôme en déterminant leur degré) (ENSI 1999)

3. Trouver f continue telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^x t.f(t)\ \mathrm{d}t = k.x.\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ où $k \in \mathbb{R}$

4. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1) $\begin{cases} y' = & -z \\ z' = & y \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' + \lambda y = & a\sin t \\ y' - \lambda x = & -a\cos t \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x' = & x + 8y + e^t \\ y' = & 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$

5. Soit l'équation (E) : $xy' = \tan y$. Trouver la solution qui vérifie $y(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

6. Soit $q : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que q soit intégrable sur $[0,+\infty[$

1. f étant une solution bornée sur $[0,+\infty[$ de l'équation différentielle (L) : $y'' + qy = 0$, étudier $\lim\limits_{+\infty} f'$.
2. Montrer que (L) a des solutions non bornées.

7. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable. Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i) $\varphi(0) = I_n$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \varphi'(0)\varphi(x)$

ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \det[\varphi(x)] \neq 0$

8. Résoudre $Y' = AY + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ -te^t \end{pmatrix}$

9. Soit (E) : $y' = y^2 + x$ et soit f une solution maximale telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est développable en série entière.
2. Montrer que f est définie sur un intervalle majoré.

10. Soit l'équation différentielle $x(x-2)y' + (x-1)y = \dfrac{1}{x-1}$. (CCP 2001)
Montrer qu'il existe une solution développable en série entière sur $]-1,1[$.

11. Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle : (CCP 2001)

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + |y| = 0$. (X-Cachan 2004)

13. (Centrale 2004)

1. Soit $J(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$.
   Montrer que J est solution de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$.
2. Soit $g = J^2 + J'^2$. Montrer que g est décroissante sur $]0,+\infty[$.
   En déduire l'existence de $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} J(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$ avec $s \in \mathbb{R}_+^*$. J est-elle intégrable ?

14. Formule de Schmidt : On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$ (Centrale 2004)

1. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe et la calculer.
2. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^4)}\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$.
   On pourra donner une représentation de $F^{(3)}$ à l'aide d'une intégration par parties.
   Montrer que : F est solution de l'équation différentielle : $y^{(4)} + y = \dfrac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^4)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left[1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x\right]$.
   En déduire l'expression de F sur $\mathbb{R}$.

15. Soit l'équation différentielle : (E) : $\begin{cases} y' = y^2 - x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (Centrale 2004)

1. Tracer avec Python la solution de cette équation (voir fiche Centrale sur l'analyse numérique).
   Tracer sur le même graphe : $\begin{cases} y^2 = x & (\alpha) \\ y^2 = x-1 & (\beta) \end{cases}$
   Que peut-on dire des tangentes de la solution de (E) aux points d'intersection avec (α),
2. Donner un développement limité de la solution de (E) au voisinage de 0.
3. Montrer qu'il est impossible que la solution de (E) « passe sous » (α)

Indication : pour le 2) Taylor, pour le 3) considérer les dérivées à droite et à gauche d'un point d'intersection.

16. Résoudre l'équation différentielle avec une série entière :

$$x.y'' + 2y' + xy = 0 \text{ avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0$$

(École de l'Air 2004)

17. Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ et $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. $f_a(P) = (X^2-1)P'(X) - 2(nX+a)P(X)$. (X-cachan 2007)

1. Démontrer que f_a est un endomorphisme de E.
2. Démontrer : $P \in \mathrm{Ker}(f_a) \iff P \in E$ et $\forall x \in]-1,1[,\ P'(x) = \dfrac{2(nx+a)}{x^2-1}P(x) \quad (*)$
3. Résoudre $(*)$
4. Démontrer que $g(x) = (1+x)^\alpha(1-x)^\beta$ est une fonction polynôme $\iff (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2$.
   En déduire $\mathrm{Ker}(f_a) = \{0\}$.
5. Démontrer que les valeurs propres de f_a sont de la forme $\lambda_k = 2(k-a),\ k \in \{-n,\dots,n\}$.
   f_a est-elle diagonalisable ? Quels sont les vecteurs propres associés ?

18. (Centrale 2007)

1. Résoudre $y'' + \dfrac{1}{x^2}\,y = 0$ sur $]1,+\infty[$.
   Quelles sont les solutions bornées ?
2. Soit $(E)\ :\ y'' + \dfrac{1}{(x^2+4x^3+3)}\,y = 0$ sur $\mathbb{R}_+$
   (a) Soit f une solution bornée de (E).
   Montrer que f' admet une limite finie en $+\infty$ et que cette limite est 0.
   (b) Montrer que (E) admet une solution non bornée.
   (Considérer un système fondamental de solutions)

Commentaire : pour la 2.b), il faut penser à utiliser le Wronskien.

19. Soient f et g deux applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. (X-cachan 2008)

1. Donner une expression de $(fg)^{(n)}$.
2. Soit l'équation différentielle $(E_\lambda)\ :\ (1-X^2)f'' - 2Xf' + \lambda f = 0$
   On pose $U_n = (X^2-1)^n$, $P_n = U_n^{(n)}$, $U_0(X) = P_0(X) = 1$, $U_n'(1-X^2) = f(U_n)$
   Montrer que P_n est solution de $E_{n(n+1)}$ sur $[-1,1]$.
3. Soit u solution de $E_{n(n+1)}$ sur $]-1,1[$. Soit $W_n = u.P_n' - P_n.u'$ définie sur $]-1,1[$.
   Trouver une équation différentielle du premier ordre satisfaite par W_n. La résoudre.

4. Montrer que les $u = \alpha P_n$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$ sont les seules solutions de $E_{n(n+1)}$ prolongeables par continuité en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
5. Soit D l'opérateur définie par $D(f)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((1-x^2)f'(x)\big)$.
   Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} D(f)(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} D(g)(t)f(t)\,\mathrm{d}t,\ \forall (f,g) \in \mathcal{C}^2([-1,1],\mathbb{C})$.
6. Soit $\lambda \notin \{n(n+1),\ n \in \mathbb{N}\},\ \lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)P_n(t)\,\mathrm{d}t$ en supposant f solution de E_λ.
7. Montrer que les seuls λ tels que f soit solution de E_λ et soit prolongeable par continuité en une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-1, 1]$ sont les $n.(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

20. On cherche à déterminer les trois réels : (X-Cachan 2008)

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}, \qquad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\binom{2n}{n}}, \qquad C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}$$

1. Trouver le rayon de convergence de $\sum a_n.x^n$ avec $a_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.
2. Montrer que $A = \dfrac{1}{3}(2B+1)$
3. Soit $f : x \mapsto (\arcsin x)^2$ définie sur $[-1, 1]$.
   Montrer que f est solution de l'équation différentielle : $(1-x^2)y''(x) - xy'(x) = 2$ avec $y'(0) = y(0) = 0$.
4. Montrer que $(\arcsin(x))^2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^{2n}}{n^2\binom{2n}{n}}$
5. En déduire A, B, C

21. **Exo 1** : Soit l'équation différentielle : $y'' + q(x)y = 0\quad (E)$ sur $\mathbb{R}^+$ où q est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\begin{cases} q > 0 \\ q' > 0 \end{cases}$ au voisinage de $+\infty$. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ solution de (E).

1. Montrer que $g : x \mapsto f^2(x) + \dfrac{f'^2(x)}{q(x)}$ est décroissante au voisinage de $+\infty$.
2. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$. (Centrale 2008)

22. Soit $q > 0$, $E = \left\{f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \text{ dérivable } /\ f'(x) = f\left(\frac{q}{x}\right)\right\}$. (Centrale 2008)

1. Montrer que $\forall f \in E$, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$
2. Montrer que f vérifie une équation différentielle d'ordre 2.
3. Chercher les solutions sous la forme $f(x) = x^\alpha$. Discuter selon les valeurs de q.
4. Déterminer complètement E.

23. Soit a une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et f une solution de l'équation différentielle : (Centrale 2009)

$$y'' + (1 + a(x))y = 0 \quad (E).$$

1. Montrer que $g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ est solution d'une équation différentielle.
2. Montrer qu'il existe une constante C telle $|f(x)| \leqslant C + \int_0^x |a(t)|\,|f(t)|\ \mathrm{d}t$.
3. En déduire que les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

24. Soit l'équation différentielle $(E) : t\,y''(t) + t\,y'(t) + 2\,y(t) = 0$.
Déterminer les solutions développables en séries entières.

25. Soit l'équation différentielle $(E) : ty''(t) + y'(t) - ty(t) = 0$.

1. Déterminer les solutions de (E) développables en séries entières.
2. On considère $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{t\cos u}\ \mathrm{d}u$.
   (a) Montrer que f_0 est solution de (E).
   (b) Soit f et g deux fonctions réelles et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant (E). Montrer que $\delta = f'g - fg'$ est dérivable et vérifie
   $$(E') \quad : \forall t \in \mathbb{R},\ t\,\delta'(t) + \delta(t) = 0.$$
   (c) Déterminer les solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ de (E').
   (d) En déduire l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant (E).
   (e) Donner le développement en série entière de f_0.