Feuille d'exercices sur les équations différentielles.

1. Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

a. $t.y' - 2y = t$
b. $t(t+2)y' + (t+1)y = 1$
c. $2t(1-t)y' + (1-t)y = 1$
d. $y' \sin t + y \cos t = \sin^2 t$
e. $y'' + y = t^2 \cos t$

2. Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : (x^2 - 4x)y' - (x+2)y = x$.

1. Montrer qu'il existe une solution développable en série entière sur un voisinage de l'origine.
2. Intégrer complètement $(\mathcal{E})$ et examiner la régularité des solutions en 0.

3. On considère l'équation différentielle $(E) : (x-1)y'' + 2y' + y = 0$.

1. Déterminer les solutions de (E) développables en séries entières pour $|x| < 1$, puis montrer que toutes les solutions de (E) sur $]-1, +1[$ sont développables en séries entières sur cet intervalle.
2. Montrer que, parmi ces solutions, il existe une droite vectorielle de solutions développables en séries entières sur $\mathbb{R}$.

4. On étudie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : xy' + \lambda y = \dfrac{1}{1+x} (\lambda \in \mathbb{R}^{+\star})$.

1. Déterminer la solution qui admet une limite finie en 0^+.
2. Existe-t-il une solution développable en série entière autour de 0 ?

5. Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : (x^2 - 1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions développables en série entière.
2. Intégrer $(\mathcal{E})$ en utilisant les intégrales de Wallis.

6. On note $D_0 = 1$, et pour $n \in \mathbb{N}^\star$, D_n le nombre de partitions de $\{1, \ldots, n\}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ D_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.
2. Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_k}{k!} z^k$. Montrer que le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à 1.
3. Trouver une équation différentielle vérifiée par f. Calculer alors f.

7. Intégrer sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation différentielle $(\mathcal{E}) \quad x^2y'' + xy' - y = x \ln x$.

8. Intégrer l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$.

9. Intégrer le système différentiel $Y' = AY$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1) $\begin{cases} x' = x + y, & x(0) = a \\ y' = 2x & y(0) = b \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = -y + \sin \alpha t & (\alpha \in \mathbb{R}) \\ y' = x - \cos \alpha t & \text{poser } z = x + iy \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x'' = -5x - y \\ y'' = x - 3y \end{cases}$

4) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 2y + z \\ z' = -x + y \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x'' + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y = 0, & x(0) = 2a, & x'(0) = 0 \\ y'' + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y = 0, & y(0) = 0, & y'(0) = 0 \end{cases}$

11. Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : y + y'' = \frac{1}{x}$.

1. Montrer qu'il existe une et une seule solution de limite 0 en $+\infty$.
2. Montrer que les fonction f et g définies par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} \,\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t \text{ sont des solutions de } (\mathcal{E}).$$

3. Comparer f et g et en déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$.

12. Soit un mobile de masse m, d'abscisse $x(t)$ dont l'équation du mouvement est :

$$m\ddot{x} = g - \operatorname{sgn}(\dot{x})\Phi(\dot{x})$$

où Φ est une fonction paire, positive sur $[0, +\infty[$, C^1 sauf peut-être en 0. g est une constante positive.

a) Interpréter physiquement l'équation,

b) La résoudre dans le cas : $\Phi(x) = x^2$,

c) Montrer que dans le cas général, on a : $x(t) \underset{+\infty}{\sim} vt$ (Cachan 2000)

13. On considère l'équation différentielle : $2x.(1-x).y' + (1-x).y = 1$ (X-Cachan 2011)

1. Déterminer une primitive de $\dfrac{\sqrt{x}}{2x(1-x)}$ sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
2. Déterminer une primitive de $\dfrac{\sqrt{-x}}{2x(1-x)}$ sur $]-\infty, 0[$
3. Donner la solution homogène.
4. Donner les solutions maximales.

14. On se place sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. (Centrale 2011)
Soit (E) l'équation différentielle définie sur I par : $y''(x)\cos(x) - 2y'(x)\sin(x) - y(x)\cos(x) = \sin(x)$
On note (E_0) l'équation homogène associée à (E).

1. Vérifier que $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ est solution de (E_0).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E_0) et (E).

15. Soit l'application $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt)}{1+t^2}\, dt$. (Mines 2011)

1. Montrer la continuité de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) + f(x) = \dfrac{1}{x}$.
3. Résoudre cette équation différentielle.

16. Exo 1 : Soit l'application $f : x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi xt - t^2}\, \mathrm{d}t$. (Centrale 2010)

1. Trouver le domaine de définition de f. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.
2. Trouver une équation différentielle satisfaite par f.
3. Résoudre l'équation différentielle.

17. On considère la fonction $f : t \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-t\sin(x))\, \mathrm{d}x$ et l'équation différentielle (Mines 2010)

$$(E) : ty'' + y' - ty + 1 = 0$$

1. Montrer que f vérifie l'équation différentielle (E).
2. Chercher des solutions de (E) sous la forme de série entière.
3. En déduire alors $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, \mathrm{d}x$.

18. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation différentielle suivante : (X-ENS 2018)

$$\forall t \geqslant 1,\ t\,f'(t) = f(t) - f(t-1) \qquad (1)$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire que
$$f(t) = t\left(f(1) - \int_1^t \frac{f(s-1)}{s^2}\, \mathrm{d}s\right)$$
2. On suppose que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(u-1)}{u^2}\, \mathrm{d}u$ converge.
   (a) Montrer que : $f(t) = t\displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{f(s-1)}{s^2}\, \mathrm{d}s$.
   (b) Montrer que : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f'(t) = 0$

19. On considère l'équation différentielle $(E) : y''(x) + x\,y'(x) + 2\,y(x) = 0$ sur l'intervalle I à déterminer. Déterminer les solutions développables en série entière. (Mines 2018)

20. **Exo 1** : On note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie décimale d'un réel x. (X-ENS 2017)
Soit ζ un irrationnel.

1. Montrer que la fonction $n \in \mathbb{N} \longmapsto \{n\zeta\} \in [0,1]$ est injective.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \neq n$ deux entiers naturels tels que :
$$0 < \{m\zeta\} - \{n\zeta\} < \varepsilon$$
3. Montrer que l'ensemble des réels de la forme $a + b\zeta$ avec a, b des entiers relatifs, est dense dans $\mathbb{R}$.

On considère l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = f$ avec f une fonction continue dans $\mathbb{R}$ non constante. On cherche à montrer l'unicité d'une solution périodique. Soient y_1, y_2 deux solutions périodiques de période T_1 et T_2.

4. Montrer que T_1/T_2 est rationnel.
5. En déduire que $y_2 - y_1$ est bornée.
6. Montrer $y_1 = y_2$

21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(t)^n}\,\mathrm{d}t$. (Centrale 2017)

1. Justifier que les a_n sont bien définies et calculer a_1 et a_2.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)\,a_{n+2} = n\,a_n$.
3. On définit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n-1}$.
   Montrer que le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.
4. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
5. Déterminer f.

22. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et l'équation différentielle $(E_a) : xy' + ay - xy^2 = a$.

1. Montrer qu'il existe une solution $\Phi :]-1,1[\to \mathbb{R}$ développable en série entière telle que $\Phi(0) = 1$.
2. Montrer que $\Phi(x) \underbrace{=}_{x \to 1^-} O\left(\frac{1}{1-x}\right)$.
3. Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ tel que $f(0) = f(1) = 0$.
   Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 t^a\,(f'(t))^2\,\mathrm{d}t \geqslant a \int_0^1 t^{a-1}\,f^2(t)\,\mathrm{d}t$.
   <u>indication</u> : considérer $I = \displaystyle\int_0^1 t^a\,(f'(t) + f(t)\Phi(t))^2\,\mathrm{d}t$.

23. Soit $\mathcal{E} : \begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$ avec a, b, c et d des réels strictement positifs.

1. Interpréter ces équations sachant que x est une densité de sardines, y une densité de requins, et que la probabilité de rencontre entre une sardine et un requin est proportionnelle à xy.
2. $H(x,y) = by + dx - c\ln x - a\ln y$. Montrer que $H(x(t), y(t))$ est une intégrale première du mouvement ([1]) (x, y solutions strictement positives de $\mathcal{E}$)
3. Si x et y sont des solutions périodiques (> 0) de $\mathcal{E}$, calculer leur valeur moyenne.
   indication : considérer $\displaystyle\int_0^T \frac{x'(t)}{x(t)}\,\mathrm{d}t$.
4. Montrer que les solutions ne peuvent être que périodiques.
   indication : diviser $\mathbb{R}^2$ en 4 quadrants selon les signes de $a - by$ et de $c - dx$. Montrer par l'absurde que : $\exists t_1 \mid y(t_1) = \dfrac{a}{b}$ et $x(t_1) < \dfrac{c}{d}$
5. Comment modéliser l'influence de la pêche ? (Cachan 2005)

1. une intégrale première du mouvement est une quantité qui reste constante au cours du temps