FEUILLE D'EXERCICES SUR LES ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS.

1. Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum \left|u_n^2\right| \text{ convergente } \}$.
Montrer que $(u, v) \longmapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{u_n} v_n$ définit un produit scalaire hermitien sur E.
Soit F l'ensemble des suites presque toutes nulles. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E. Trouver $F^\perp$ puis $F^{\perp\perp}$ Vérifier que $F^\perp \oplus F \neq E$ et $F^{\perp\perp} \neq F$.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\vec{u}$ un vecteur unitaire de E. On définit l'application f par $\forall \vec{x} \in E,\ f(x) = (\vec{u}.\vec{x})\,\vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{x}$

1) Identifier la transformation et en donner les éléments caractéristiques.

2) Donner la matrice représentative de la rotation autour de $\vec{u}$ d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (CCP 1999)

3. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+y-2z = 0$, déterminer les matrices représentatives des applications linéaires suivantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel :

- p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $\mathcal{P}$,
- q la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{P}^\perp$,
- s la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $\mathcal{P}$,

4. Déterminant de Gram Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'un produit euclidien noté $(.|.)$.
Pour $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in E^p$, on note $G(x_1, x_2, \cdots, x_p) = \det\Big(((x_i|x_j))_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leq p}\Big)$.

a) Montrer que : $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ est libre $\iff G(x_1, x_2, \cdots, x_p) \neq 0$,

b) On suppose que $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ est une base d'un sous espace vectoriel F de E.
Soit $x \in E$, soit $(y_1, y_2) \in F \times F^\perp / x = y_1 + y_2$.
Montrer que $G(x, x_1, x_2, \cdots, x_p) = \|y_2\|^2 \cdot G(x_1, x_2, \cdots, x_p)$.

5. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ deux familles de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E telles que :
$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!],\ (x_i|x_j) = (y_i|y_j)$$

- comparer $\mathrm{rg}(x_1, \cdots, x_n)$ et $\mathrm{rg}(y_1, \cdots, y_n)$
- Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal f de E tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(x_i) = y_i$.

6. On considère $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire hermitien tel que $(1, X, \ldots, X^n, \ldots)$ soit une base orthonormale. Vérifier que le projecteur $u : P \longmapsto P(1)$ n'a pas d'adjoint en calculant $u^*(1).X^k$ pour tout k.

7. Soit E un espace vectoriel euclidien.
Trouver toutes les homothéties et tous les projecteurs autoadjoints de E.

8. Montrer que $(P, Q) \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Trouver l'adjoint de $u \in \mathcal{L}(E)$, où, $u : P \longmapsto (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$.

9. Dans $E = \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, montrer que l'application qui $(X, Y) \longmapsto \mathrm{tr}({}^tXY)$ définie sur $E \times E$ est un produit scalaire sur E.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $f : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ X & \longmapsto & AX - XB \end{pmatrix}$. Trouver l'adjoint de f.

2) dans le cas où $p = q$ et pour S le sous-espace vectoriel des matrices symétriques réelles, trouver $S^\perp$.

10. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, tell que $f^\star \circ f = f \circ f^\star$ (où $f^\star$ est l'adjoint de f). Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires. (Mines 2000)

11. Soir E un espace préhilbertien réel, p et q deux projecteurs orthogonaux de E.

1) Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

   (1) pq est un projecteur orthogonal.

   (2) $pq = qp$

2) Si pq est un projecteur orthogonal, montrer que :

   $\mathrm{Im}(pq) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ et que $\mathrm{Ker}(pq) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

3) Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

   (3) $p + q - pq$ est un projecteur orthogonal.

   (2) $pq = qp$

4) Si $p + q - qp$ est projecteur orthogonal, montrer que : $\mathrm{Im}(p + q - qp) = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$

12. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues, 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

- Vérifier que $(f, g) \longmapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{[0,2\pi]} \overline{f} g$ est une produit scalaire hermitien sur E,
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on définit $e_k \in E$ par $e_k : x \longmapsto e^{ikx}$.
  Vérifier que $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale.
- Pour tout $n, \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \mathrm{Vect}\{e_k \mid k \in [\![-n, n]\!]\}$. Trouver la projection orthogonale de $f \in E$ sur F_n

13. Si A est une matrice symétrique positive, c'est à dire si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(R)$, ${}^tX.A.X \geqslant 0$, montrer l'existence d'une unique matrice symétrique positive H telle que $H^2 = A$ (H est appelée une racine carrée de A).

14. polynômes de Legendre

Soit $E = \mathbb{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f \mid g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} fg$.

- Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant :

  (1) $\forall n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n$

  (2) $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \Rightarrow (P_i \mid P_j) = 0,$
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que P_n a au moins une racine réelle sur $]-1, 1[$.
- On appelle $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les racines réelles distinctes de P_n appartenant à $]-1, 1[$ et en lesquelles P_n change de signe. En considérant le produit scalaire de P_n avec $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_p)$ montrer que $p = n$.
- Montrer qu'il existe une unique suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant :

  (1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg L_n = n$

  (2) $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $i \neq j \Rightarrow (L_i \mid L_j) = 0$

  (3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n(1) = 1$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, fixé, il existe Q unique dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :

  $\deg Q = 2n$

  $(X - 1)^n$ divise Q

  $L_n = Q^{(n)}$
- Montrer que $\forall i \in [\![0, n - 1]\!]$, $(L_n \mid X^i) = 0$ et en déduire que $(X + 1)^n$ divise Q.
- Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \mu(X^2 - 1)^n$.
- Montrer que $\mu = \dfrac{2^{-n}}{n!}$

15. Chercher les extrema de $\dfrac{(x + y + z)^2 + (x + y)^2 + x^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

16. Montrer que la fonction $u(x,y) = x^2 + y^2$ admet des extremums que l'on précisera quand x et y vérifient $3x^2 - 2xy + 5y^2 = 1$. CCP 1999

17. On considère Φ l'application bilinéaire de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$, avec $\Phi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} tP(t)Q(t)\mathrm{d}t$. On considère le produit scalaire : $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

1) Montrer qu'il existe φ_n un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P,Q) = \langle P \mid \varphi_n(Q)\rangle$

2) Diagonaliser φ_2. (Centrale 2001)

18. **1)** Montrer que $\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_2[X]$.

2) Trouver (P_0, P_1, P_2) une base du produit scalaire (avec maple)

3) Soit $b : (P,Q) \mapsto \int_0^1 tP(t)Q(t)\mathrm{d}t$. bilinéarité?

4) Montrer qu'il existe un endomorphisme de E tel que $b(P,Q) = (f(P) \mid Q)$, $\forall (P,Q)$

5) ...? (Centrale 2001)

19. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit f une rotation d'angle θ d'axe D.

1. Montrer que $\exists Q \in \mathbb{R}_3[X] \,/\, Q(f) = 0$ et $Q(0) = 1$.

2. Montrer que $\exists R \in \mathbb{R}_2[X] \,/\, f^* = R(f)$.

3. Montrer que $\exists T \in \mathbb{R}_2[X] \,/\, \Pi = T(f)$ avec Π : projection orthogonale d'axe D. (Centrale 2001)

20. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$. Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de E non nuls et orthogonaux. On considère : $\forall \vec{x} \in E,\ f(\vec{x}) = (\vec{a}.\vec{x})\vec{b} + (\vec{b}.\vec{x})\vec{a}$.

a) Vérifier que f est un endomorphisme de E. Trouver son noyau et son image.

b) On note f^* l'adjoint de f. Quelle relation vérifient f et f^*?

c) En considérant une base orthonormée appropriée de E, trouver $|||f|||$.
(on rappelle que $|||f||| = \sup\big(\{\|f(\vec{x}\|\,, \forall \vec{x}, \|x\| = 1\}\big)$.

d) Soit $\vec{x} \in E$, $g(\vec{x}) = (\vec{a}.\vec{x})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{x})\vec{a}$. Vérifier que f est un endomorphisme de E. Trouver son noyau et son image.

e) Trouver $|||g|||$

f) (en supplément) que vaut g^*? Trouver $\vec{x} \in E \mid \forall \vec{x} \in E,\ g(\vec{x}) = \vec{v} \wedge \vec{x}$. (Centrale 2001)

21. **a)** Soit l'application $\begin{pmatrix} M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \mathrm{tr}({}^tA.B) \end{pmatrix}$.
Montrer qu'elle définit un produit scalaire euclidien.
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ où $S_n(\mathbb{R})$ représente les matrices réelles symétriques d'ordre n. On pose $A = (a_{i,j})$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ses n valeurs propres (pas forcément toutes distinctes). Montrer l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$, calculer $d(M) = \displaystyle\inf_{A \in S_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (m_{i,j} - a_{i,j})^2 \right)$

b) Soit P définit par $P = \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid m_{i,j} \geqslant 0 \text{ et } \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1 \right\}$

1. P est-il compact?
2. Montrer que P est stable par la multiplication matricielle.
3. Montrer que : $\forall M \in P,\ \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(P) \subset D_F(0,1)$ (centrale 2001)

22. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique positive, $U \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}(UB) \leqslant \mathrm{tr}\, B,\ \forall U \in O_n(\mathbb{R})$. (TPE 2001)