

FEUILLE D'EXERCICES SUR LES ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS.

1. Soit $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n^2 \text{ convergente} \}$.

Montrer que $(u, v) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$ définit un produit scalaire sur E .

Soit F l'ensemble des suites « nulles presque partout ». Montrer que F est un sous espace vectoriel de E . Trouver $F^\perp$ puis $F^{\perp\perp}$. Vérifier que $F^\perp \oplus F \neq E$ et $F^{\perp\perp} \neq F$.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\vec{u}$ un vecteur unitaire de E . On définit l'application f par $\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}) = (\vec{u} \cdot \vec{x}) \vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{x}$. (CCP 1999)

1. Identifier la transformation et en donner les éléments caractéristiques.

2. Donner la matrice représentative de la rotation autour de $\vec{u}$ d'angle $\frac{\pi}{2}$, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y - 2z = 0$, déterminer les matrices représentatives des applications linéaires suivantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel :

1. p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $\mathcal{P}$,
2. q la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{P}^\perp$,
3. s la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $\mathcal{P}$.

4. Déterminant de Gram Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$.

Pour $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$, on note $G(x_1, x_2, \dots, x_p) = \det \left(((x_i | x_j))_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p} \right)$.

1. Montrer que : $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est libre $\iff G(x_1, x_2, \dots, x_p) \neq 0$,
2. On suppose que $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est une base d'un sous espace vectoriel F de E .

Soit $x \in E$, soit $(y_1, y_2) \in F \times F^\perp / x = y_1 + y_2$.

Montrer que $G(x, x_1, x_2, \dots, x_p) = \|y_2\|^2 \cdot G(x_1, x_2, \dots, x_p)$.

5. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ deux familles de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E telles que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, (x_i | x_j) = (y_i | y_j)$$

1. comparer $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$ et $\text{rg}(y_1, \dots, y_n)$,
2. Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal f de E tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(x_i) = y_i$.

6. Soit E un espace préhilbertien réel, p et q deux projecteurs orthogonaux de E .

1. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(1) pq est un projecteur orthogonal

(2) $pq = qp$

2. Si pq est un projecteur orthogonal, montrer que :

$$\text{Im}(pq) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) \text{ et que } \text{Ker}(pq) = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q).$$

3. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(3) $p + q - pq$ est un projecteur orthogonal

(2) $pq = qp$

4. Si $p + q - qp$ est projecteur orthogonal, montrer que : $\text{Im}(p + q - qp) = \text{Im } p + \text{Im } q$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0\}$. (Centrale 2014)

1. Montrer que F est un hyperplan vectoriel de $(\mathbb{R}_n[X], +, \cdot)$.
2. Donner un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}_0[X]$ parallèlement à F .
3. Donner un produit scalaire tel que cette projection soit orthogonale.

8. polynômes de Legendre

Soit $E = \mathbb{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f | g) = \int_{-1}^1 fg$.

1. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant :

- (1) $\forall n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n$
- (2) $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \Rightarrow (P_i | P_j) = 0$,

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que P_n a au moins une racine réelle sur $] -1, 1[$.

3. On appelle $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les racines réelles distinctes de P_n appartenant à $] -1, 1[$ et en lesquelles P_n change de signe. En considérant le produit scalaire de P_n avec $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_p)$ montrer que $p = n$.

4. Montrer qu'il existe une unique suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant :

- (1) $\forall n \in \mathbb{N}, \deg L_n = n$
- (2) $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \Rightarrow (L_i | L_j) = 0$
- (3) $\forall n \in \mathbb{N}, L_n(1) = 1$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, fixé, il existe Q unique dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\begin{aligned} \deg Q &= 2n \\ (X - 1)^n &\text{ divise } Q \\ L_n &= Q^{(n)} \end{aligned}$$

6. Montrer que $\forall i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, (L_n | X^i) = 0$ et en déduire que $(X + 1)^n$ divise Q .

7. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \mu(X^2 - 1)^n$.

8. Montrer que $\mu = \frac{2^{-n}}{n!}$

9. On considère Φ l'application bilinéaire de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$, avec $\Phi(P, Q) = \int_{-1}^1 tP(t)Q(t) dt$. On

considère le produit scalaire : $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$. (Centrale 2001)

- 1. Montrer qu'il existe φ_n un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P, Q) = \langle P | \varphi_n(Q) \rangle$
- 2. Diagonaliser φ_2 .

10. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit f une rotation d'angle θ d'axe D . (Centrale 2001)

- 1. Montrer que $\exists Q \in \mathbb{R}_3[X] / Q(f) = 0$ et $Q(0) = 1$.
- 2. Montrer que $\exists T \in \mathbb{R}_2[X] / \Pi = T(f)$ avec Π : projection orthogonale sur l'axe D .

11. a) Soit l'application $\begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \mapsto & \text{tr}(^t A.B) \end{pmatrix}$. (centrale 2001)

Montrer qu'elle définit un produit scalaire euclidien.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ représente les matrices réelles symétriques d'ordre n . On pose $A = (a_{i,j})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ses n valeurs propres (pas forcément toutes distinctes). Montrer l'égalité :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $d(M) = \inf_{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (m_{i,j} - a_{i,j})^2 \right)$

b) Soit P définit par $P = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid m_{i,j} \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n m_{i,j} = 1, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$

- 1. Montrer que P est stable par la multiplication matricielle.
- 2. Montrer que :

$$\forall M \in P, \text{sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset B_F(0, 1)$$

12. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, où $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques positives.

(Centrale 2007)

1. Calculer ${}^t e_i A e_i$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et e_i vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_{i,i} \geq 0$, pour $U = [u_{i,j}] \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, puis, en étudiant une forme quadratique appliquée à $\alpha e_i + e_j$, montrer que $[u_{i,i} = 0 \Rightarrow u_{i,j} = 0, \forall j]$.
3. Soit $U = \begin{bmatrix} A & C \\ {}^t C & B \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

Montrer que $U' = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est diagonalisable (étudier $P(U')$ où P polynôme).

13. Soit M une matrice symétrique réelle.

(Centrale 2014)

1. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
 - (a) $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$.
 - (b) Il existe un produit scalaire tel que : $\langle X | Y \rangle = {}^t X M Y$, X et Y deux vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $\Phi(X, Y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$
 - (a) Montrer que Φ est une forme bilinéaire symétrique.
 - (b) Trouver une condition nécessaire suffisante sur α pour que Φ soit un produit scalaire.

14. Soit $n \geq 3$, $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, A et B deux vecteurs colonnes dans E .

(Centrale 2014)

Soit $M = A {}^t B + B {}^t A$

1. Justifier que M est diagonalisable.
2. Déterminer $\text{rg}(M)$ en fonction de A et B .
3. Déterminer le spectre de M et décrire les sous-espaces propres associés.

15. Prouver l'équivalence :

(Mines 2014)

(M est une matrice carré d'ordre n symétrique avec des valeurs propres strictement positives) si et seulement si (il existe un produit scalaire tel que pour tout entier i et j on ait $M(i, j) = \langle e_i | e_j \rangle$)

16. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$.

(Mines 2014)

$$P \mapsto \int_{-1}^1 \frac{P(t)}{1+t^2} dt$$

1. Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ une famille de $n+1$ éléments distincts deux à deux de $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe une famille $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$$

2. Donner un moyen de calculer les λ_i .

17. Déterminer les $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = n \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = n \end{cases}$.

18. Si A est une matrice symétrique réelle positive, c'est-à-dire si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X.A.X \geq 0$, montrer l'existence d'une unique matrice symétrique positive H telle que $H^2 = A$ (H est appelée une racine carrée de A).

19. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t) Q(t) dt$ définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Prouver que $u : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$ est un endomorphisme symétrique de $(\mathbb{R}_n[X], \varphi)$.

- 20.** 1. Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ des réels positifs. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 c_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 c_k \right)$$

2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, on a :

$$f^2(x) \leq x \left(\int_0^1 (f'(t))^2 dt \right).$$

3. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que : $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que : $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

Quels sont les cas d'égalité ?

- 21.** On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle M, N \rangle = \text{tr}(^tMN)$.

- Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- Calculer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

- 22.** Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (\sqrt{t} - at - b)^2 dt$.

- 23.** Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation :

- $x + 2y - 3z = 0$
- $y = x \tan \theta$; où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

- 24.** Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe D d'équation $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ qui transforme $\vec{j}$ en $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k})$.

- 25.** Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Démontrer que $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3$, $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})\vec{v} - (\vec{u}, \vec{v})\vec{w}$.

- 26.** Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$.

- 27.** Caractériser géométriquement les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ de matrices :

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

- 28.** Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{tr}(^tAB)$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixé, on pose $\Phi_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \mapsto M^tAM$. Montrer que Φ_M est un endomorphisme symétrique de E .

- 29.** Soit a, b, c trois réels et la matrice $S(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$

- Montrer que $\det(S(a, b, c)) = -(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.
- Montrer que $\vec{u} = (1, 1, 1)$ est un vecteur propre de $S(a, b, c)$ dont on déterminera la valeur propre associée.
- Montrer que les autres valeurs propres sont les racines carrées ω et $-\omega$ d'un réel α que l'on précisera en fonction de a, b et c . Déterminer une équation du plan $E_\omega + E_{-\omega}$.
- Trouver des conditions sur a, b, c pour que $S(a, b, c) \in O(3)$. Quelle est la nature de l'endomorphisme associé ?