FEUILLE D'EXERCICES SUR LES ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS.

1. Soit la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$: $(\vec{u}_1 = (1,0,1), \vec{u}_2 = (1,0,2), \vec{u}_3 = (1,1,1))$. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.

2. Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien rapporté la base orthonormale canonique, déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x - 2y + z = 0$.

3. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel, former la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équations : $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$, $x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

4. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ (x \mid y) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid f(y)) = 0$$

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = k\|x\|$.

5. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $(b_1, \dots, b_n) \in E^n$, $a_{i,j} = \displaystyle\int_0^1 b_i(t) b_j(t)\,\mathrm{d}t$, et $A = (a_{i,j})$.
Montrer que $(b_1, \dots, b_n)$ est libre si et seulement si A est inversible. Dans ces conditions, montrer que pour toute valeur propre λ de A, $\lambda > 0$.

6. Montrer que, pour tout entier n, il existe un polynôme T_n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
(On pourra trouver une relation entre T_{n-1}, T_n et T_{n+1}).
Quel est la parité du polynôme T_n ?
Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$
Calculer $\langle T_n \mid T_m \rangle$. Conclusion ?

7. Caractériser l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

8. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

1. Montrer que $\forall x \in E,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \|f^k(x)\| \leqslant \|x\|$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Im}(f - Id_E) = E$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exists U \in \mathcal{O}(n)$ telle que ${}^t\!AA = U^{-1} A\, {}^t\!A U$.

10. Soit E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
(1) : p est un projecteur orthogonal.
(2) : $p \circ p = p$ et $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

11. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Vérifier que $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x).Q(x) e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E.
Trouver la projection orthogonale du polynôme X^3 sur $F = \mathbb{R}_2[X]$

12. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note pour $(P,Q) \in E^2$, $(P \mid Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)\,Q(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$.
Montrer que E est alors muni d'une structure d'espace préhilbertien.
On pose $P \in E$, $u(P) = (1+X^2)P'(X) - nXP(X)$.
Montrer que $u(P) = (1+X^2)^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left(\dfrac{P(X)}{(1+X^2)^n}\right) + nXP(X)$.
Montrer que u est antisymétrique, c'est-à-dire $(u(P) \mid Q) = -(P \mid u(Q))$.
Que dire des valeurs propres de u^2 ? Que dire de $\ker u^2$.

13. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer l'existence d'une base orthonormale dont l'image par f soit une famille orthogonale.

14. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3,\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

Montrer que si f n'est pas nulle c'est une isométrie positive

15. Déterminer le lieu des points (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ tels que la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ soit orthogonale.

16. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire : $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 fg$.

1. Soit $v : E \to E$ défini par : $\forall f \in E$, $\forall x \in [0,1]$, $v(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $v \in \mathcal{L}(E)$, puis qu'il existe un unique $v^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall (f,g) \in E^2$, $(v(f) \mid g) = (f \mid v^*(g))$.
2. Trouver les valeurs et vecteurs propres de $v \circ v^*$.

17. Soit A et B deux matrices symétriques réelles. Montrer que : $\big(\operatorname{tr}(AB + BA)\big)^2 \leqslant 4 \operatorname{tr}(A^2) \operatorname{tr}(B^2)$.

18. Soit E un espace euclidien de dimension n et F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Soit φ une forme linéaire sur F.
On suppose que $\exists x \in E$ tel que $\forall f \in F \setminus \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$, $f(x) \neq 0$. Montrer que

$$\exists y \in E \text{ tel que } \forall f \in F,\ \varphi(f) = \langle f(x) \mid y \rangle$$

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer que :

$$\exists (y_1, \ldots, y_n) \in E^n \text{ tel que } \forall f \in F,\ \varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(e_i) \mid y_i \rangle.$$

19. Soit $A \in O_3(\mathbb{R}) \mid \det A = 1$. Soit $\sigma(A) = (\operatorname{tr}(A) - 1)^2 + \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} (a_{i,j} - a_{j,i})^2$ avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}}$.
Montrer que : $\forall A' \in O_3(\mathbb{R}) \mid A'$ soit semblable à A, on a : $\sigma(A) = \sigma(A')$. Calculer $\sigma(A)$. (Mines 2002)

20. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $v \in E$; Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ n éléments de $\mathbb{K}$.
Discuter l'existence d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$.
Même question avec une base orthonormale si E est un euclidien. (Centrale 2002)

21. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\langle . \mid . \rangle$ le produit scalaire canonique. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, $\langle u(x) \mid x \rangle = 0$

1. Montrer que u est antisymétrique (c'est-à-dire $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x) \mid y \rangle = -\langle x \mid u(y) \rangle$).
   Montrer que u^2 est diagonalisable.
   En déduire le rang de u.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice représentative de u s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   indication : on pourra utiliser une base orthonormée de l'image de u.
3. montrer que tout endomorphisme u de E tel que $\langle u(x) \mid x \rangle = 0$ pour tout x appartenant à E, il existe un vecteur $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $u : x \mapsto w \wedge x$ (Centrale 2002)

22. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \ldots & \ldots & -1 \\ -1 & 1 & -1 & & 1 \\ 1 & -1 & & & -1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
Chercher le maximum de $\{k \mid \operatorname{rg} B = k \text{ et } AB = 0_{\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})}\}$. (Centrale 2005)

23. Soit $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $u(P)(x) = \displaystyle\int_0^1 (x+t)^n P(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que u est un automorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$,
2. Montrer qu'il existe $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ et $(n+1)$ scalaires $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x) P_k(y)$.
3. Calculer la trace de u, puis celle de u^2.

24. Soit $(a_i)_{\in[\![1,n]\!]}$ n réels distincts. Soit Q un polynôme. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on définit $\varphi(P)$ comme le reste de la division euclidienne de QP par $\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)$. (Centrale 2009)

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Montrer que les valeurs propres de φ sont les $Q(a_i)$?
3. Trouver les espaces propres de φ et leurs dimensions. En déduire la diagonalisabilité de φ.

25. Soit $\mathcal{P}_d$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ composé des polynômes à une indéterminée de degré inférieur ou égal à d. On considère $N_2(P) = \sqrt{\int_0^1 |P(x)|^2 \, \mathrm{d}x}$.
Les quatre questions sont indépendantes. (X-Cachan 2009)

1. Montrer que N_2 est une norme sur $\mathcal{P}_d$.
2. Soit $E = \{P \in \mathcal{P}_2 \mid P(1) = 1\}$. Montrer que l'application $P \mapsto N_2(P)$ admet un minimum sur E. Déterminer où est atteint ce minimum.
3. On considère l'application $\begin{pmatrix} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P+P' \end{pmatrix}$.
   Montrer que c'est un automorphisme.
4. Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $P \mapsto \|f-P\|_\infty$ admet un minimum sur E.

26. Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (\vec{\varepsilon_1}, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de E formée de vecteurs unitaires. On suppose que : $\forall x \in E,\ \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{e}_i \mid \vec{x}\rangle^2$.
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E.

27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $D(P) = P'' - 2XP'$.
Soit $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$. (Centrale 2013)

1. Montrer que $\langle . \mid .\rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que D est un endomorphisme et donner ses valeurs propres.
3. Montrer que l'endomorphisme D est diagonalisable et que les sous-espaces propres de D sont orthogonaux deux à deux.

28. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M^2 = {}^tM$ $(*)$. (Centrale 2013)

1. Montrer que si M inversible et vérifie $(*)$ alors M est une matrice orthogonale.
   Caractériser les matrices inversibles vérifiant $(*)$.
2. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M et $F = \ker u$.
   Montrer que $F^\perp$ est stable par u.
3. $n = 2$, déterminer les matrices vérifiant $(*)$.
4. idem avec $n = 3$.

29. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulles. Définissons l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)\, B$. (X 2018)

1. Déterminer les valeurs propres de φ ?
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour φ soit un projecteur orthogonal.

30. Soit u et v deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$. (X-Cachan 2018)
On définit $g : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|au+bv\|$ avec $\|.\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (a,b) \in C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 = 1\}$, $g(a,b) \geqslant m > 0$.
2. En déduire : $g(a,b) \geqslant m\sqrt{a^2+b^2}$
3. Soit $k \geqslant 2$. On définit, $\forall j \leqslant k,\ p_j = (x_j, y_j)$ avec $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante.
   On pose $f(a,b) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (y_j - ax_j - b)^2$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\|(a,b)\|\to+\infty} f(a,b) = +\infty$.
4. Montrer qu'il existe $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(a_0, b_0) = \min_{\mathbb{R}^2}(f)$.
5. Interprétation géométrique ?