FEUILLE D'EXERCICES SUR LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS.

1. Montrer que $N : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sup\{|x+t.y| \mid t \in [0,1]\} \end{pmatrix}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Dessiner la sphère unité.

2. Sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on définit les trois normes

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt \qquad N_2(f) = \left(\int_0^1 f^2(t)\, dt\right)^{1/2} \qquad N_\infty(f) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|$$

On considère la suite $(f_n)_{n \geqslant 2}$ d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} & \Rightarrow & f_n(t) & = & nt \\ \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{2}{n} & \Rightarrow & f_n(t) & = & 2-nt \\ \frac{2}{n} \leqslant t \leqslant 1 & \Rightarrow & f_n(t) & = & 0 \end{cases}$$

Calculer $N_1(f_n)$, $N_2(f_n)$ et $N_\infty(f_n)$. Que dire de la suite (f_n) dans les différents espaces vectoriels (E, N_1), (E, N_2) et (E, N_∞).

3. Soit $E = \left\{ f \in C^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0 \right\}$.
  1. Montrer que $\|f\| = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f''(t) + 2f'(t) + f(t)|$ définit une norme sur E.
  2. Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant a\,\|f\|$. Trouver le meilleur coefficient a.

4. Soit R un réel strictement positif, montrer que $\overline{B_{\mathrm{O}}(a,R)} = B_{\mathrm{F}}(a,R)$ et que $\overset{\circ}{\overbrace{B_{\mathrm{F}}(a,R)}} = B_{\mathrm{O}}(a,R)$.

5. Soit E un espace vectoriel normé, A et B deux parties de E, on définit $A+B = \{a+b/a \in A,\ b \in B\}$.
Montrer que :
  a) A ouvert ou B ouvert $\Rightarrow A+B$ ouvert.
  b) (A et B fermés) n'implique pas ($A+B$ fermé).
  c) Si E est de dimension finie, montrer que l'on a :
  A fermé borné et B fermé $\Rightarrow A+B$ fermé.

6. Les fonctions suivantes admettent-elles des limites en $(0,0)$?

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \frac{x-y}{x^2+y^2} \qquad \frac{x^3.y}{x^2+y^2} \qquad e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$$

$$\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \cos\frac{x}{y} \qquad \frac{x.y^2}{x^2+y^4}$$

7. Soit E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E, montrer que
- $F \neq E \Rightarrow \overset{\circ}{F} = \emptyset$
- Tout sous-espace vecctoriel d'un espace vectoriel dimension finie est fermé.
- Donner un exemple où F de dimension infinie et F non fermé.

8. Montrer que $f : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \frac{x}{1+\|x\|} \end{pmatrix}$ induit un homéomorphisme (c'est-à-dire f inversible continue et f^{-1} continue) de E sur la boule unité.
Montrer que f est lipschitzienne et trouver le meilleur rapport.

9. Soit A une partie non vide de E espace vectoriel normé.
Pour tout $r > 0$, on pose $B(A,r) = \{x \in E \mid d(x,A) < r\}$. Montrer que :

$$B(A,r) = \bigcup_{x \in A} B(x,r),\ \ \overline{A} = \bigcap_{r>0} B(A,r)$$

Si A est bornée, calculer le diamètre de $B(A,r)$ en fonction de celui de A.

10. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $u : E \to F$ linéaire. Montrer que :
(Pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E de limite 0_E, on a $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans F)$\Rightarrow u$ continue.

11. Soit (u_n) une suite réelle bornée. $a_n = \inf\limits_{k\geqslant n} u_k$ et $b_n = \sup\limits_{k\geqslant n} u_k$.

1. Montrer que (a_n) et (b_n) sont convergentes
2. Montrer que (u_n) est convergente $\iff$ (a_n) et (b_n) ont la même limite. (Centrale 2001)

12. On définit la suite (u_n) par : $u_n = \cos\frac{x}{2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}$. Étudier (u_n).
(on pourra calculer d'abord $v_n = u_n \sin\frac{x}{2^n}$). Air 1999

13. Une suite (a_n) est définie par la donnée de $a_0 > 0$ et $a_1 > 0$, et la relation de récurrence :

$$a_{n+2} = \ln(1 + a_{n+1}) + \ln(1 + a_n)$$

1. Étudier l'existence et le signe de a_n.
2. Soit $f : x \mapsto x - 2\ln(1 + x)$; montrer que f s'annule en un et un seul point α de $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Soit $\beta = \min(a_0, a_1, \alpha)$ et $\gamma = \max(a_0, a_1, \alpha)$; prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta \leqslant a_n \leqslant \gamma$.
4. Soit $\lambda_n = \inf\limits_{k\geqslant n} a_k$ et $\mu_n = \sup\limits_{k\geqslant n} a_k$; montrer que (λ_n) et (μ_n) convergent.
   On note λ et μ leurs limites respectives.
5. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\ln(1 + \lambda_n) \leqslant \lambda_{n+2} \leqslant \mu_{n+2} \leqslant 2\ln(1 + \mu_n)$, en déduire $\lambda = \mu = \alpha$.
6. Étudier la convergence de (a_n).

14. On fixe $a > 0$ et $b > 0$, et on définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $u_0 = a$, $v_0 = b$; et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers le même réel.

15. Soit $\mathcal{B} = \big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\big\}$.
On considère l'endomorphisme Δ de $\mathcal{B}$ défini par

$$\Delta : u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ où } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Calculer $d(1, \Delta(\mathcal{B}))$ dans $\mathcal{B}$ muni de la norme infinie.
2. Un résultat analogue reste-t-il vrai pour toute autre norme sur $\mathcal{B}$?

16. Soit A et B deux parties non vides, fermées et disjointes de E un espace vectoriel normé,

1. Trouver une fonction continue $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f|_A= 0$ et $f|_B= 1$
2. En déduire l'existence de deux ouverts disjoints U et V de E tels que : $A \subset U$ et $B \subset V$

17. Montrer que det : $\begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \det(A) \end{pmatrix}$ est une application continue.
En déduire que l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

18. Montrer qu'il n'existe pas deux applications linéaires continues u et v d'un espace vectoriel normé E dans lui-même telles que : $v \circ u - u \circ v = Id_E \quad (1)$
(*indication* : on pourra montrer que (1) $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ v \circ u^{n+1} - u^{n+1} \circ v = (n + 1).u^n$)

19. Soit $\alpha \in [0, 1]$, vérifier que l'on définit un endomorphisme T_α sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $E = \mathrm{C}([0, 1], \mathbb{R})$ par $g = T_\alpha(f)$ où $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. E étant normé par $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$, montrer que T_α est continue si $\alpha \in [0, 1[$ et dans ce cas calculer $|||T_\alpha||| = \sup\{\|T_\alpha(f)\| \ / \ \|f\| \leqslant 1\}$.

20. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ normé par $N(P) = \sup\{|a_i| \mid i \in [\![0, n]\!]\}$ pour $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$. Soit $L = \sum\limits_{i=0}^{q} \lambda_i X^i$ un polynôme non nul. Montrer que l'application $\varphi : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & LP \end{pmatrix}$ est linéaire continue.
Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \|\varphi(P)\| \leqslant a\,\|P\|$. Trouver le plus petit des a qui convient.

21. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $\|u\| \leqslant 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u^n le $n^{ième}$ itéré de u et $v_n = \dfrac{1}{n+1}(\mathrm{Id}_E + u + u^2 + \cdots + u^n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}_c(E)$ vers un projecteur p. Déterminer l'image et le noyau de p.

22. Soit $E = \mathbb{K}[X]$ normé par $\|P\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant k \leqslant \deg P} |a_k|$ pour $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Montrer que $H = \left\{P \in E \mid P(1) = 0\right\}$ est un hyperplan dense de E, c'est-à-dire, tel que $\overline{H} = E$.

23. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f : E \to F$. (Mines 2017)
Montrer que :

$$f \text{ continue} \iff \forall A \subset E,\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

24. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie ouverte de E. (Mines 2018)
Montrer que $U = \bigcup\limits_{a \in A} \overline{B(a,1)}$ est un ouvert.

25. **Définition** : ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite extraite de (x_n) qui converge vers ℓ. (X - 2017)
Soit (x_n) une suite réelle bornée.

1. On définit $y_n = \inf\limits_{k \geqslant n} x_k$.
   (a) Montrer que la suite (y_n) est une suite convergente.
   (b) En déduire que la suite (x_n) admet au moins une valeur d'adhérence.
2. Soit (x_n) une suite réelle bornée admettant une unique valeur d'adhérence. Montrer que la suite (x_n) est convergente.
3. (a) Soit (x_n) une suite réelle bornée telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} 3x_n + x_{3n} = 0$.
   La suite (x_n) est-elle convergente ?
   (b) Trouver une suite réelle divergente vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} 3x_n + x_{3n} = 0$ et ayant une unique valeur d'adhérence.
4. Soit (x_n) une suite réelle bornée, soit a et b deux réels non nuls tels que $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
   Montrer que $(\exp(iax_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\exp(ibx_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent implique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

26. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^d$ muni de son produit scalaire usuel et de la norme euclidienne associée. (X-ENS 2018)
Soit $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^d)^2$. On considère deux boules de même rayon $B_1 = B(x_1, R)$ et $B_2 = B(x_2, R)$.
Trouver le rayon minimal d'une boule contenant $B_1 \cap B_2$.

27. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A. On suppose que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (Centrale 2018)

1. (a) Que peut-on dire des λ_i ?
   (b) Donner un polynôme de degré p qui annule A.
2. Montrer que si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ est annulateur de A alors $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i$ est racine de Q.
   En déduire que $(I_n, A, \ldots, A^{p-1})$ est une famille libre.
3. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists P_k \in \mathbb{R}_{p-1}[X],\ A^k = P_k(A)$.
4. Montrer que $L = P(A)$ avec $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

28. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (Centrale 2018)

1. La matrice M est-elle diagonalisable ?
   Existe-il une suite de matrices diagonalisables qui tend vers M ?
2. Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$ de degré n, montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si seulement si pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$.
3. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices diagonalisables qui tend une matrice A.
   Montrer que le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.