

FEUILLE D'EXERCICES SUR LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS.

1. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ par : $N((x, y)) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2}$.

Déterminer et dessiner la sphère unité.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $(g_1, \dots, g_p)$ des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. et l'application

$$N : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^p x_k g_k(t) \right| dt \end{array}$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(g_1, \dots, g_p)$ pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^p$.

3. Soit l'application N définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice A associe le maximum des modules de ses valeurs propres. L'application N définit-elle une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
4. Soit X l'ensemble des fonctions $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π -périodiques, et Y celui des fonctions $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues 2π -périodiques.

1. Montrer que $\|t\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} |t(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |t''(x)|$ définit une norme sur X .

2. Montrer que $\|t\|_Y = \sup_{x \in \mathbb{R}} |t(x)|$ définit une norme sur Y .

3. Soit $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $\Phi : \begin{pmatrix} X & \rightarrow & Y \\ t & \mapsto & t'' + \omega^2 t \end{pmatrix}$.

Montrer que Φ est une application linéaire continue et injective de $(X, \|\cdot\|_X)$ dans $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $(u_{3n+2})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{4n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{5n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

6. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = x_{n-1} + 2x_n$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Ceci reste-t-il vrai avec $y_n = x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n$?

(ENSEA 2000)

7. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1[0, 1] \mid f(0) = 0\}$ et p une fonction continue.

$$N_p(f) = \int_0^1 |f'(t) + p(t)f(t)| dt, \quad N_\infty(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$$

Montrer que N_p et N_∞ sont des normes. Les comparer.

8. Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, $f \in E$, $N_1(f) = \sup_{[0, 1]} (|f| + |f'|)$ et $N_2(f) = \sup_{[0, 1]} (|f|) + \sup_{[0, 1]} (|f'|)$.

Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes.

9. Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que l'on définit des normes $N_1, N_2, \dots$ par : $N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$, $N_2(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \|f''\|_\infty, \dots$. Comparer ces normes deux à deux.

10. Soit F un fermé d'un espace vectoriel normé E .

Montrer que $d_F : \begin{pmatrix} E & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & d(x, F) = \inf \{ \|x - y\|, y \in F \} \end{pmatrix}$ est 1-lipschitzienne.

Montrer que l'application $F \mapsto d_F$ est injective (sur l'ensemble des fermés de E).

11. Soit A une partie non vide de E et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ k -lipschitzienne.

– Justifier la définition de $g : \begin{pmatrix} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) = \sup_{t \in A} \{ f(t) - k\|x - t\| \} \end{pmatrix}$

– Vérifier que g prolonge f et que g est aussi k -lipschitzienne

12. Étudier les domaines de définition, la continuité et les limites en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :

$$\frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad \frac{x + y}{x^2 + y^2} \quad \frac{x^2 \cdot y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\sin(x + y)}{x^2 + y^2} \quad \frac{x + y^2}{x^3 + y^4} \quad \frac{\sin(\frac{1}{x}) \cdot y^2}{x^2 + y^4}$$

13. Soit A une partie convexe non vide d'un espace vectoriel normé E . Montrer que la fonction $\begin{pmatrix} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x, A) \end{pmatrix}$ est convexe.
14. Pour toute partie bornée non vide A , on appelle diamètre de A la borne supérieure de

$$\{\|y - x\| \mid (x, y) \in A^2\}$$

Montrer que A et $\bar{A}$ ont même diamètre.

Qu'en est-il pour les diamètres de A et de $\overset{\circ}{A}$?

15. Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des suites convergentes à valeurs dans E un espace vectoriel normé. $\mathcal{C}$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que l'application $L : \begin{pmatrix} \mathcal{C} & \rightarrow & E \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \end{pmatrix}$ est une application linéaire continue. Montrer que L est une fonction lipschitzienne et donner le meilleur coefficient a tel que $\forall x \in \mathcal{C}, \|L(x)\| \leq a \|x\|_\infty$.
16. Étudier le caractère fermé, ouvert et borné des parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes et en donner une représentation :
1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 < |x| < 2\}$.
 2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq 1 \text{ et } |x - y| \leq 1\}$
 3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - 1)^2 + (y - 2)^2 < 4\}$
 4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, \text{ et } x + y \leq 1\}$

17. Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et soit $f : E \rightarrow F$ qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

1. Montrer que si f est continue en 0_E alors f est linéaire.
2. Même question en supposant que f est bornée sur $B_F(0_E, 1)$.

18. Soit ℓ^∞ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Pour $x = (x_n) \in \ell^\infty$, on pose $N(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

vérifier que c'est une norme.

On considère $\Delta : \begin{pmatrix} \ell^\infty & \rightarrow & \ell^\infty \\ x = (x_n) & \mapsto & y = (y_n) \end{pmatrix}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1} - x_n$.

Montrer que Δ est un endomorphisme continu de ℓ^∞ . Montrer que Δ est une fonction lipschitzienne et trouver le meilleur coefficient a tel que $\forall x \in \ell^\infty, N(\Delta(x)) \leq a N(x)$.

19. On pose $f_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^n kx^k$. Montrer que f_n possède une unique racine u_n dans $[0, 1]$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, puis déterminer sa limite.

20. Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme N_∞ .

1. Montrer que $\varphi : \begin{pmatrix} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f'(0) \end{pmatrix}$ est une forme linéaire non continue,
2. Vérifier que $\varphi^{-1}(\{0\})$ est non fermé.

21. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel de dimension finie E . F distinct de E .

1. Montrer que, pour tout x élément de E , il existe x' élément de F tel que $\|x - x'\| = d(x, F)$.
2. Montrer qu'il existe x dans $E \setminus F$ tel que $\|x\| = d(x, F)$

22. Soit A et B deux parties non vides de E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie, fermées et disjointes.

Montrer que si A est une partie fermée bornée, alors $d(A, B) > 0$

Donner un exemple dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{R}^2$ où $d(A, B) = 0$

23. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, K une partie fermée bornée de E , $f : K \rightarrow K$ telle que : $\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. Montrer que f a un point fixe unique.

24. Soit A une partie fermée bornée de E et $f : E \rightarrow E$ continue sur A telle que $f(A) \subset A$. On suppose qu'il existe un point a de E tel que, pour tout $x \in A : x \neq a \Rightarrow \|f(x) - a\| < \|x - a\|$.

Montrer que a est un élément de A .

On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A par : $x_0 \in A$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

Indication : On admettra le théorème de Bolzano-Weierstrass qui nous dit que toutes suites bornées en dimension finie admet une sous-suite convergente.

25. Soit p un entier plus grand que 2 et $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On définit $u : M \mapsto M + {}^tM$ et $v : M \mapsto M - {}^tM$.

1. On définit $\|M\| = \max_{1 \leq i, j \leq p} |m_{i,j}|$. Donner $\|u\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|u(X)\|}{\|X\|}$ et $\|v\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|v(X)\|}{\|X\|}$.

2. même question si $\|M\| = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^p |m_{i,j}|$. (Centrale 2009)

26. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $C_M = \{PMP^{-1}, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})\}$. Soit $M' \in \overline{C_M}$. (X 2020)

1. Montrer que M et M' ont les mêmes valeurs propres.

2. Trouver les matrices diagonales dans $\overline{C_M}$.

27. Vrai ou faux ? Justifier vos réponses. (X 2021)

1. Il existe une application f continue surjective de $[0, 1]$ dans $]0, 1[$.

2. Il existe une application f continue surjective de $]0, 1[$ dans $[0, 1]$.

3. Il existe une application f bijective de $]0, 1[$ dans $[0, 1]$.

28. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. Soit $C = \{X \in (\mathbb{R}_+)^n / \|X\|_\infty = 1\}$. (X 2021)

1. Montrer que C est un fermé borné.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} > 0$.

$$\text{Soit } r : \begin{pmatrix} C & \rightarrow & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(\frac{v_i}{(Av)_i} \right) \end{pmatrix}.$$

Prouver que r admet un minimum.

3. Montrer que ce minimum est non nul.

29. Soit K un fermé borné d'un espace vectoriel normé de dimension finie. (X 2021)

Soit $f : K \rightarrow K$ telle que $\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| < \|y - x\|$.

1. Existe-t-il $\lambda \in [0, 1[$ tel que $\forall (x, y) \in K^2, \|f(y) - f(x)\| \leq \lambda \|y - x\|$.

Si ce n'est pas le cas, en donner un contre-exemple.

2. Montrer que f admet un unique point fixe.

30. On considère un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension 2 et une base (e_1, e_2) de E qui vérifie :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \|\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2\| = \||\lambda_1| e_1 + |\lambda_2| e_2\| \quad (*)$$

1. Trouver un espace vectoriel normé et une base associée où $(*)$ est vérifiée et un autre espace vectoriel normé et une base associée où $(*)$ n'est pas vérifiée.

On veut montrer que :

(ENS 2021)

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4, |\alpha_1| < |\beta_1| \text{ et } |\alpha_2| < |\beta_2| \Rightarrow \|\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\| \leq \|\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2\| \quad (**).$$

Pour λ fixé, on pose $\Phi : \mu \in \mathbb{R} \mapsto \|\mu e_1 + \lambda e_2\|$.

2. (a) Montrer que $\forall (\mu, \mu') \in \mathbb{R}^2, \Phi\left(\frac{\mu + \mu'}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\Phi(\mu) + \Phi(\mu'))$.

(b) Montrer que $\forall \alpha \in [0, 1], \forall (\mu, \mu') \in \mathbb{R}^2, \Phi(\alpha \mu + (1 - \alpha) \mu') \leq \alpha \Phi(\mu) + (1 - \alpha) \Phi(\mu')$, c'est-à-dire Φ est une application convexe.

(c) Prouver la croissance de Φ sur $\mathbb{R}_+$.

(d) En déduire le résultat $(**)$