FEUILLE D'EXERCICES SUR LES ESPACES VECTORIELS.

Généralités

1. Parmi ces ensembles, préciser ceux qui sont des espaces vectoriels et ceux qui n'en sont pas (on identifiera $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$) :

a) $A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(0) = 0\}$,

b) $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(0) = 1\}$,

c) soit $a \in \mathbb{R}$, $C = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(a) = 0\}$,

d) soit $(a,b) \in \mathbb{R}$, $D = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(a).f(b) = 0\}$,

e) $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n = 0\}$,

f) $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)$ admet une sous-suite convergente$\}$,

g) soit $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $G = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)$ négligeable devant $(v_n)\}$,

h) soit $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $H = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)$ équivalente à $(v_n)\}$,

i) $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + 2.y^2 + 2z^2 + 2.x.y + 2.z.x = 0\}$

2. Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel E.
Montrer que : $A \subset B \Rightarrow \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.
Comparer :

a) $\mathrm{Vect}(A \cup B)$ et $\mathrm{Vect}(A) \cup \mathrm{Vect}(B)$,

b) $\mathrm{Vect}(A \cap B)$ et $\mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$,

c) $\mathrm{Vect}(\mathrm{Vect}(A))$ et $\mathrm{Vect}(A)$,

d) $\mathrm{Vect}(A \cup B)$ et $\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$.

3. Démontrer que dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'ensemble des applications affines forme un sous-espace vectoriel dont un supplémentaire est constitué des fonctions nulles en 0 et en 1.

4. Soit $\mathcal{F} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathcal{F}$.
Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

5. Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (on appelle hyperplan de E tout sous espace vectoriel de E qui admet un droite comme supplémentaire) et $x \in E \setminus H$; prouver que $E = H \oplus \mathbb{K}x$. On fera une démonstration particulière pour le cas où E est de dimension finie.

6. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites de réels, F le sous-espace vectoriel de E constitué des suites convergentes, G l'ensemble des suites constantes, H l'ensemble des suites de limite nulle. Prouver que $F = G \oplus H$

7. Soit $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2 / f \circ g = g \circ f$,

a) Montrer que $g(\mathrm{Ker}\, f) \subset \mathrm{Ker}\, f$ et $g(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Im}\, f$,

b) Trouver des exemples où les inclusions sont strictes.

8. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que $(\cos(x), \sin(x), \cos(\sqrt{2}.x), \sin(\sqrt{2}.x))$ est une famille libre. En déduire que l'ensemble des fonctions périodiques n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

9. soit $f\begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+2z, -2x+y+z) \end{pmatrix}$,

a) Montrer que f est linéaire,

b) donner la matrice représentative de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$,

c) Trouver $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$,

d) Trouver $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$,

e) Vérifier que : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$,

10. Soit f et g deux formes linéaires non nulles sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Prouver qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x)g(x) \neq 0$.

11. E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note φ l'application qui, à $f \in E$, associe $\varphi(f)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\big[\varphi(f)\big](x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt$. Prouver que φ est un endomorphisme de E ; est-il injectif ? surjectif ?

12. Soit N une matrice nilpotente d'ordre p de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\exp(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!}$.

- Montrer que $(\exp(N) - I_n)$ est nilpotente.
- Soit N une matrice nilpotente, montrer que $N + I_n$ est inversible. (Mines 2001)

13. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On note $\varphi(P)$ le reste de la division euclidienne de $(X^4 - 9)P(X)$ par $(X^4 + 3X^2)$.

- Montrer que φ est un endomorphisme.
- Déterminer $\operatorname{Ker} \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$.
- φ est-elle diagonalisable ? (ENSI 2001)

14. Soit $\varphi : \begin{pmatrix} M_n(\mathbb{C}) & \to & M_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & (\operatorname{tr} M)I_n + M \end{pmatrix}$.

- Montrer que φ est un endomorphisme (rapidement).
- $\operatorname{Ker} \varphi$? $\operatorname{Im} \varphi$?
- Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de φ.
- φ est-elle diagonalisable ? inversible ? si oui que vaut φ^{-1}. (ENSI 2001)

<u>Projecteurs</u>

15. Soit p et q deux projecteurs d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

(i) prouver que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$,

(ii) on suppose que $p + q$ est un projecteur, établir :

$\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{\vec{0}\}$, $\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$, $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q = \operatorname{Im}(p+q)$ et $\ker p + \ker q = E$.

16. Soit u et v deux endomorphismes d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Prouver que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$ si et seulement si u et v sont deux projecteurs ayant même noyau.

17. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2) / f^{n-1}(x) \neq 0$ *et* $f^n(x) = 0$, montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une famille libre.

18. Soit E un $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension n, soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de même dimension p.

Montrer qu'il existe F un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F_1 \oplus F = F_2 \oplus F$.

19. Soit $f_a \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-a| \end{pmatrix}$, soit n un entier naturel et $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une famille de n réels distincts deux à deux. Montrer que la famille $(f_{a_1}, f_{a_2}, \cdots, f_{a_n})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

20. $\psi_{\text{n}}\begin{pmatrix}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \cos(n.x)\end{pmatrix}$ et $\varphi_n\begin{pmatrix}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & (\cos x)^n\end{pmatrix}$

a) Montrer que pour tout entier n, $(\psi_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $(\varphi_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont des familles libres de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

b) Montrer que pour tout entier n, $\mathrm{Vect}(\{\psi_k/0\leqslant k\leqslant n\}) = \mathrm{Vect}(\{\varphi_k/0\leqslant k\leqslant n\})$,

c) $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une famille génératrice de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

21. Trouver $\{u\in\mathcal{L}(E)/\forall x\in E,\ (u(x),x)$ est une famille liée$\}$.

22. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, V un sous-espace vectoriel de E.

On considère $\mathcal{L}_V(E,F)=\{u\in\mathcal{L}(E,F)/V\subset\mathrm{Ker}(u)\}$.

a) Montrer que $\mathcal{L}_V(E,F)$ est un espace vectoriel.

b) Trouver sa dimension.

23. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, f une application linéaire de E dans F et B un sous-espace vectoriel de F, montrer que :

$$\dim\ f^{-1}(B)=\dim\ \mathrm{Ker}(f)+\dim\ (B\cap\mathrm{Im}(f))$$

24. Montrer que les seules matrices $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(MAB)=\mathrm{tr}(MBA).$$

sont les matrices scalaires.

25. Étant donnés les éléments A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, trouver $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$M+(\mathrm{tr}\,M).A=B.$$

26. Montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telles que :

$$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(AM)=\mathrm{tr}(BM)$$

sont égales.

27. Soit W_h l'ensemble des fonctions continues vérifiant : (Centrale 2017)

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \int_{x+h}^{x+2h} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Montrer que W_h est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$.
2. W_h est-il de dimension finie ?
3. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{h>0} W_h=\{0\}$.

28. Un matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite de Dirac s'il existe un réel k tel que $M^2=k\,I_n$. (Centrale 2018)

1. On se place dans le cas $n=2$. Soit $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

   Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M soit de Dirac.
2. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de Dirac telle que $k\neq 0$.

   Montrer que M est inversible, que M^{-1} est de Dirac.
3. Soit A et B deux matrices telles que A, B et $A+B$ matrices de Dirac.

   Montrer que $AB+BA$ est une matrice scalaire.
4. On se place dans le cas $n=4$. Trouver $M,N,P\in\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ non scalaires telles que :

   $$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ xM+yN+zP \text{ est de Dirac.}$$