FEUILLE D'EXERCICES SUR LES ESPACES VECTORIELS.

1. Parmi ces ensembles, préciser ceux qui sont des espaces vectoriels et ceux qui n'en sont pas :

a) $A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M.X_0 = 0\}$, où $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M.X_0 = X_0\}$, où $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \det(M) = 0\}$,

d) soit $D = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^t(X_1)M.X_0 = 0\}$, où X_0 et X_1 sont deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$,

e) $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante$\}$,

f) $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)$ est une suite monotone$\}$,

g) soit $G = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{u_n}{n^2}\right) = 0\right\}$,

h) soit $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $H = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n).(v_n) = (0)_{n\in\mathbb{N}}\}$,

i) $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x^2 + 3y^2 - z^2 + 5xy + xz + 2yz = 0\}$

2. Soit E l'ensemble des applications $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continues telles que les restrictions $f\,|_{[-1,0]}$ et $f\,|_{[0,1]}$ soient affines.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Donner une base de E.

3. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ et le plan P d'équation $x + y + z = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$.
2. Donner la matrice dans la base canonique de la projection sur P parallèlement à D.

4. Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ stable par produit.

1. Soit $f \in \mathcal{A}$ non constante. Montrer que f prend une infinité de valeurs distinctes.
2. Montrer que la famille des fonctions $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.
3. Conclusion ?

5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E. Montrer que $\mathrm{rg}(f^3) = \mathrm{rg}(f^4)$. Montrer que l'on peut généraliser le résultat, c'est-à-dire que si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p alors $\mathrm{rg}(f^p) = \mathrm{rg}(f^{p+1})$

6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, u^2$.
Montrer que $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$ et u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ soit inversible. Montrer que $\mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v = n$.

8. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère : $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (2, 2, 2, 6)$, $c = (0, 2, 4, 4)$, $d = (1, 0, -1, 2)$ et $e = (2, 3, 0, 1)$.
On pose $F = \mathrm{Vect}\{a, b, c\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{d, e\}$. Calculer les dimensions de chacun des sous-espaces F, G, $F \cap G$ et $F + G$ et donner une base pour chacun d'eux.

9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que, si f et g sont nilpotents et commutent, alors $f + g$ est nilpotent.
2. Montrer les implications suivantes :

$$f \text{ nilpotent} \Rightarrow Id - f \text{ inversible}$$
$$fg \text{ nilpotent} \Rightarrow gf \text{ nilpotent}$$
$$(Id - fg) \text{ inversible} \Rightarrow (Id - gf) \text{ inversible.}$$

10. On considère les trois formes linéaires sur :

$f_1 : (x, y, z) \mapsto 2x - y + 3z$, $f_2 : (x, y, z) \mapsto 3x - 5y + z$ et $f_3 : (x, y, z) \mapsto 4x - 7y + z$

forment-elles une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$?

11. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(X) = \mathrm{tr}(AX)$.
Montrer que pour avoir en plus $f(XY) = f(YX)$ pour couple (X, Y) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il faut et il suffit que A soit une matrice scalaire (c'est-à-dire de la forme : λI_n).

12. 1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{rg}\, M = 1$. Montrer que $M^2 = (\mathrm{tr}\, M).M$. (Mines 2002)
2) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tels que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A + B) = 1$.
Montrer que : $\mathrm{tr}(AB) = (\mathrm{tr}\, A)(\mathrm{tr}\, B)$.

13. Trouver l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3, à l'aide des polynômes d'interpolation de Lagrange, qui vérifie :
$P(0) = -1, \qquad P(2) = 1, \qquad P(-2) = 1, \qquad P(-1) = 2$

14. Soit $\zeta_{n,z}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui admettent z pour racine d'ordre $\geqslant n$. (centrale 2002)
Pour tout polynôme A de $\mathbb{C}[X]$ tel que z ne soit pas racine de A, on note :
$M_{n,A} = \big\{AP \mid P \in \mathbb{C}[X],\ \deg P \leqslant n - 1\big\}$.
Montrer que $M_{n,A}$ et $\zeta_{n,z}$ sont supplémentaires.

15. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$ et f, g deux endomorphismes de E tels que $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g = E$. Montrer que les sommes sont directes.

16. Soit V un espace vectoriel de dimension n, k un entier et $V_1, \dots, V_k$ des sous-espaces vectoriels de V tels que $\sum_{i=1}^{k} \dim V_i > (k-1)n$. Montrer que $\bigcap_{i=1}^{k} V_i \neq \{0_E\}$

17. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 1$.
On définit l'ensemble $E = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid X + {}^tX = 2\,\mathrm{tr}(X)A\}$

1. montrer que E est un espace vectoriel.
2. Déterminer la dimension de E.

18. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: (X-Cachan 2002)

1. $X = (\mathrm{tr}\, X)A + B$
2. $X + {}^tX = (\mathrm{tr}\, X)A$
3. $\mathrm{tr}({}^tXX) = \mathrm{tr}\, A$

19. Soit l'équation $X + {}^tX = \mathrm{tr}\, X.A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (Centrale 2005)

1. Trouver les conditions sur A pour avoir des solutions à cette équation
2. Chercher les solutions pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. Montrer que l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et trouver sa dimension.

20. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie. (Centrale 2005)

1. Montrer que pour tout sous espace vectoriel A de E :
$$\dim f(A) = \dim A - \dim(A \cap \mathrm{Ker}\, f)$$
2. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel L de F :
$$\dim f^{-1}(L) = \dim E + \dim(L \cap \mathrm{Im}\, f) - \mathrm{rg}\, f$$

21. Soit pour tout entier k de 0 à n : $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$.

1. Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner la décomposition de $Q = \frac{d^n}{dX^n}(X^n(1 - X)^n)$ dans cette base.
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

22. Montrer que l'application $\begin{pmatrix} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X^2) + (1 + X^2)\,P(X) \end{pmatrix}$ est linéaire.
Est-elle injective ? Surjective ?

23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^p = 0$.
2. En déduire pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j) = 0$.

24. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculer A^2 puis montrer que A^2 est une combinaison linéaire de A et de I_3.
En déduire A^{-1} puis A^n, où $n \in \mathbb{Z}$.

25. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non inversible.
Montrer qu'il existe deux matrices B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$A = BC,\ B \text{ inversible},\ C \text{ nilpotente}$$

27. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Soit M la matrice définie par blocs, égale à $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est inversible si et seulement si A et C sont inversibles.
2. Lorsque A et C sont inversibles, exprimer M^{-1} sous forme de blocs.