FEUILLE D'EXERCICES SUR DÉRIVATION ET INTÉGRATION.

1. Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^+$ et φ une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ $(a<b)$. Montrer que $\left|\int_a^b f(t)e^{i\varphi(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Soit f une application continue de $[a,b]$ $(a<b)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$.
Montrer que $f(x)$ a un argument constant sur $[a,b]$.

3. Montrer que $\|f\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left|\int_0^1 f(t).t^n\,\mathrm{d}t\right|$ est une norme sur $\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$

4. Soit f une fonction continue par morceaux, calculer $\lim\limits_{\substack{k\to 0\\ k>0}} \int_0^1 \dfrac{kf(t)}{k^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

5. Soit $f:\begin{pmatrix}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2+1}\end{pmatrix}$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

6. Justifier la définition de la fonction : $f:\begin{pmatrix}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\cos^n x\sin nx\end{pmatrix}$.
Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$; calculer f'.
En déduire f.

7. Étudier la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{t^n}{n}\sin nt$. Pour quelles valeurs de t peut-on dériver la somme de cette série de fonctions ? Calculer les sommes $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f'_n(t)$ où $f_n(t)$ désigne $\dfrac{t^n}{n}\sin nt$.

8. On pose $f_n(t) = t^{2n}\ln t$ si $0<t\leqslant 1$, et $f_n(0)=0$. Étudier $\sum f_n$.

9. Justifier l'égalité : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 t^n\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

10. Déterminer les domaines de convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum(-1)^n\dfrac{e^{-nx}}{n}$.
Calculer la somme S de cette série.

11. On pose, pour x réel, $u_n(x) = nx^n$. Calculer la somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ si elle existe.

12. Pour $x\in[0,1]$, on pose $f(x) = \int_0^1 e^{|x-t|}\sin|x-t|\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$.

13. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{x^2+n^2}$.

1) Donner le domaine de définition de f. Calculer $f(0)$.
2) Donner une expression de $f(x)-\ln 2$ sous la forme de la somme d'une série de fonctions. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3) Montrer que f est continue, puis de classe $\mathcal{C}^\infty$

14. Montrer qu'il n'existe pas d'application continue f de $\mathbb{C}^\star$ dans $\mathbb{C}$ telle que : $\forall z\in\mathbb{C}^\star,\ (f(z))^2 = z$.
indication : on pourra considérer $g : t\mapsto f(e^{it})$.

15. Calculer $\int_{-1}^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x-e^{i\theta}}$. En déduire $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$. Calculer la somme $\sum\dfrac{(-1)^n}{4n+1}$. (ENSAM 1999)

16. Soit f continue de $[1,+\infty[\to\mathbb{R}$. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_1^{1+1/n} f(t^n)\,\mathrm{d}t$ (ENSAM 2001)

17. On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que la série converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Qu'en déduisez-vous ?
2. Montrer que la fonction $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que S vérifie une équation différentielle simple du second ordre sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Montrer que la fonction S n'est pas dérivable en 0.
5. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$

18. Soit la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x}$ (Centrale 2001)

Montrer que f est C^1 sur son domaine de définition et étudier les limites éventuelles à ses bornes.

19. a) Montrer qu'il existe une et une seule fonction f de classe C^∞ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \displaystyle\int_x^{f(x)} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.

b) Trouver le sens de variation de f.

c) Montrer que f admet comme asymptote $x \mapsto ax + b$ (déterminer a et b). (Centrale 2007)

20. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1, convexe. (Mines 2007)

Montrer que

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) \leqslant \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{8}(f'(n) - f'(1))$.

21. $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$. (CCP 2006)

— Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Montrer que f admet une limite en 0, la calculer éventuellement.

22. Soit $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$. (CCP 2006)

1. Domaine de convergence $\mathcal{D}$ de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

   Sur $\mathcal{D}$, on note $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Continuité de S ?
3. Dérivabilité de S ?
   Calculer S' et en déduire l'expression de $S(x)$.

23. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x^2}$ et $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$. (Mines 2008)

1. f admet-elle un développement en série de fonctions ?
2. Continuité de f ?
3. Équivalent de f en 0 ? en $+\infty$?

24. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - x^n}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\,\mathrm{d}x$. (Mines 2008)

Quelle est la limite quand $n \to \infty$ de I_n ?

Donner un équivalent de I_n.