FEUILLE D'EXERCICES SUR DÉRIVATION ET INTÉGRATION.

**1.** Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $f_n(t) = \dfrac{2^n t}{1+n2^n t^2}$

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Que concluez-vous sur la convergence uniforme de cette suite ?

**2.** 1. Déterminer une fonction $H_n$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$\forall x \leqslant -\frac{1}{n},\ H_n(x) = 0$

$\forall x \geqslant \frac{1}{n},\ H_n(x) = 1$

$H_n$ est monotone sur $\mathbb{R}$.

(donner une expression analytique de $H_n$)

2. Soit $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x$ existe Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n'(x).f(x)\,\mathrm{d}x$

3. Montrer que $(H_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$. (cachan 2000)

**3.** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a<b$ et $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que pour tout $t \in [a,b]$, on a :

$$f(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^t \frac{x-a}{b-a}f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_t^b \frac{x-b}{b-a}f'(x)\,\mathrm{d}x$$

2. En déduire :

$$(1) \qquad |f(t)| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$(2) \qquad \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x$$

**4.** Soit $I = [-a,a]$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. On pose $M_k = \displaystyle\sup_{x\in I}\left|f^{(k)}(x)\right|$, $k = 0, 1$ ou $2$. Montrer que pour tout $x \in I$ :

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{x^2+a^2}{2a}M_2$$

2. $I$ est maintenant un intervalle quelconque. Montrer que si $f$ et $f''$ sont bornées sur $I$, il en est de même pour $f'$. $M_0,\ M_1, M_2$ étant définis comme en 1., montrer que si $I = \mathbb{R}$ alors $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$

**5.** Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k+1}{n}\right)$ lorsque $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$.

**6.** 1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $u_n(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{x^n - 1}$

2. En déduire $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{z-e^{it}}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{U}$

**7.** Soit $f$ une fonction continue par morceaux définie sur $[0,1]$ positive ou nulle, telle que $\displaystyle\int_0^1 f > 0$ et $A$ un polynôme réel tel que $\displaystyle\int_0^1 A^2 f = 0$. Montrer que $A$ est le polynôme nul.

**8.** Soit $f$ une fonction définie continue par morceaux sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, calculer : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

**9.** Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 nt}\,\mathrm{d}t$

**10.** Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 t^n\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

**11.** Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.

**12.** Étudier suivant la valeur de $k\in\mathbb{R}$ la fonction $f_k:x\mapsto\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+k^2-2k\cos x}}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

**13.** Étudier les fonctions $f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ et $g(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$

**14.** Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ deux fonctions continues. On suppose l'existence d'un réel $A>0$ tel que : $\forall t\geqslant 0,\ |\varphi(t)|\leqslant A+\displaystyle\int_0^t|\varphi(x)|\,u(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que : $\forall t\geqslant 0,\ |\varphi(t)|\leqslant A\exp\left(\displaystyle\int_0^t u(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

**15.** Montrer que $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ est définie sur $[-1,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$.

**16.** Soit $\varphi_\alpha(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^\alpha e^{-nt},\ \alpha>0$.

1. Domaine de définition de $\varphi_\alpha$. Continuité de $\varphi_\alpha$ ? $\varphi_\alpha$ est-elle $C^1$ ?
2. Calculer $\displaystyle\lim_{t\to0^+}t^{\alpha+1}\varphi_\alpha(t)$ (Mines 2002)

**17.** Soit $x\in\mathbb{R}$, $\begin{cases} f_0(x)=\operatorname{sh}x\\ f_{n+1}(x)=\displaystyle\int_0^x -2tf_n(t)\,\mathrm{d}t,\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Expliciter $f_1$ et $f_2$.
2. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ f_n(x)=2(2n-1)f_{n-1}(x)+4x^2f_{n-2}(x)$.
3. Montrer que :
$$\left[\exists(Q,P)\in\mathbb{R}[X]\,/\,\forall x\in\mathbb{R},\ P(x).\operatorname{sh}(x)+Q(x).\operatorname{ch}(x)=0\Rightarrow P=Q=0_{\mathbb{R}[X]}\right]$$
4. Montrer l'existence et l'unicité de $(Q_n)$ et $(P_n)$ dans $(\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ telles que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},\ f_n(x)=P_n(x).\operatorname{sh}(x)+Q_n(x).\operatorname{ch}(x)$$
   (a) Expliciter $P_0$, $Q_0$, $P_1$ et $Q_1$.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre les $P_k$ et les $Q_k$. (X-Cachan 2007)

**18.** Soit $f_n$ une fonction définie par $f_n:\begin{pmatrix}[0,1[ & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & (1-x^n)^{1/n}\end{pmatrix}$ et $f_n(1)=0$.

On a également : $u_n=1-\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que : $f_n$ est décroissante, concave, symétrique par rapport à la première bissectrice
2. Montrer que $f_n$ admet un unique point fixe : $x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$.
3. Montrer que : $u_n=v_n+2w_n$ avec $v_n=(1-x_n)^2$ et $w_n=\displaystyle\int_0^{x_n}(1-f_n(x))\,\mathrm{d}x$.
4. Montrer que $\sum v_n$ converge, puis que : $0\leqslant w_n\leqslant\frac{2}{(n+1)^2}$. (X-Cachan 2007)

**19.** Soit la série de fonctions $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sin(a^nx)$ avec $a\in]-1,1[$. (Centrale 2011)

Montrer que la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donner l'expression de $f^{(p)}(x)$.

**20.** Soit l'application $f$ définie par $\begin{cases} f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q^2} \text{ avec } \frac{p}{q} \text{ fraction irréductible, } p \in \mathbb{Z}^*,\ q \in \mathbb{N}^* \\ f(0) = 0 \\ f(x) = 0;\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. (Centrale 2011)

1. Soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^* \cap [-a, a]$ avec $a \in ]0, 1[$. Soit $q_0$ la partie entière de $\frac{1}{a}$.
   Montrer que $q \geqslant q_0$
2. Montrer que $f$ est continue en 0 et en tout point $x \notin \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $f$ est discontinue en tout point $x$ de $\mathbb{Q}^*$.
4. Montrer que $f$ est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

**21.** Soit la fonction $\zeta$ définie par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^x}$. (Mines 2011)

1. Donner le domaine de définition de $\zeta$.
2. Sur quel intervalle y-a-t-il convergence uniforme ?
   Question oral : pourquoi $\left|\frac{1}{n^x}\right|_\infty^{[\alpha, +\infty[} = \frac{1}{n^\alpha}$ ?
3. Montrer que la fonction $\zeta$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$.
4. Déterminer les limites $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \zeta(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \zeta(x)$.

**22.** Soit la fonction $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2(n+1)}$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ sur $[-\pi, \pi]$. (Mines 2011)

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $S(x)$ ? La fonction $S$ est-elle continue ?
2. Montrer que $\forall (x, y) \in [-\pi, \pi]^2,\ |S(x) - S(y)| < |x - y|$, pour $x \neq y$.
3. La fonction $S$ est-elle contractante ?

**23.** Soit la suite de terme général $u_n(x) = \dfrac{n.x}{2^n\, x^2 + n}$ pour tout $x$ réel, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. (Centrale 2010)

1. Montrer que $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Y-a-t-il convergence uniforme de $\sum u_n$ sur tout $\mathbb{R}$ ?
3. Quels sont les réels $x$ en lesquels $f$ est dérivable ?
4. Trouver un équivalent de $f$ en l'infini.

**24.** Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f\, f'' = 0$.
Soit l'ensemble $Z(f\, f') = \{x \in [a, b] \mid f f'(x) = 0\}$. (Centrale 2010)

1. À l'aide de l'étude des variations de $ff'$, montrer que $Z(ff')$ est un intervalle fermé.
2. Soit $Z(f) = \{x \in [a, b] \,/\, f(x) = 0\}$. Montrer que $Z(f)$ est un intervalle fermé.
3. Montrer que $f$ est une fonction affine.

**25.** Soit $f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(x+1)}\right)$. (Mines 2010)

1. Convergence simple de la série des $f_n$ sur $\mathbb{R}_+$ ?
2. Convergence uniforme de la série des $f_n$ sur $\mathbb{R}_+$ ?
3. Convergence normale de la série des $f_n$ sur $\mathbb{R}_+$ ?
4. Montrer que $f$ la somme infinie des $f_n$ est continue et dérivable.