FEUILLE D'EXERCICES SUR LES INTÉGRALES IMPROPRES.

1. Étudier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \operatorname{th}^\alpha x)\,\mathrm{d}x$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

2. Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t \neq 0 & \longmapsto & \frac{|\sin t|}{t} \\ 0 & \longmapsto & 1 \end{pmatrix}$. (ENTPE 1999)

1. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
2. Soit $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} u_k$ diverge.
3. f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

3. Prouver l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} 3x - \operatorname{th} 2x}{x}\,\mathrm{d}x$

4. Soit p, q des réels strictement positifs.

1. Prouver l'existence de $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$,
2. Exprimer $I_{p,q}$ sous forme d'une série,
3. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

5. Soit f une fonction positive continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

1. Montrer que si f décroissante positive et intégrable sur $[0, +\infty[$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ puis que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x.f(x) = 0$.
2. On suppose que f intégrable sur $[0, +\infty[$, peut-on en déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$? Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n.f(x_n) = 0$.

6. Prouver l'existence et comparer : $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$ et $S_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. (ENSI 1999)

7. On pose $r_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2} t\,\mathrm{d}t$, $\quad (n \in \mathbb{N})$. Montrer que : $r_{n+1} + r_n = \dfrac{1}{2n+3}$.

En déduire que, au voisinage de $+\infty$, on a : $r_n \sim \dfrac{1}{4n}$.

Exprimer $s_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ en fonction de r_n et en déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n$.

8. Soit $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ vérifiant $g'(x) =_{+\infty} o\left(\dfrac{g(x)}{x}\right)$. (X-Cachan 2001)

1. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)x^\varepsilon = +\infty$. Que peut-on en conclure sur g ?
2. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} xg(x)$

9. (Mines 2018)

1. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Exprimer cette limite en fonction de γ.

10. Existence et calcul des intégrales : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(a+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $(a > 0)$.

11. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

12. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$. (Centrale 2019)

1. Montrer l'existence de I.
2. (a) Donner l'ensemble de définition de f.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Calculer f sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Montrer que f est continue en 0 et en déduite I.

13. Définition, dérivabilité et variation de la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{\ln(tx)}$.

14. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{1+tx}{1-tx}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-t^2}}$ lorsque cela est possible, étudier $F'(x)$ puis $F(x)$. (Centrale 2001)

15. Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. (Mines 2021)

1. Montrer que f est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. Calculer la dérivée de f.
2. Calculer un équivalent simple de f en 0 et en $+\infty$.
3. Montrer que f est intégrable sur $]0,+\infty[$. Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$?

16. Existene et calcul éventuel de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t^{2n}+t^n+1)^{1/2}}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Et sur $[1,+\infty[$? (Mines 2001)

17. Soit $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+e^{-t}+\ldots+e^{-nt}}\,\mathrm{d}t$. (Mines 2001)

1. Étudier la suite (u_n).
2. Étudier la série $\sum u_n$.

18. Soit $p(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{xn+1}$ $(x>0)$. p est-elle continue sur $]0,+\infty[$? (ENSI 2001)

Montrer que $p(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x+1}$.

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$. (Centrale 2011)

20. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(x^2+\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$. (TPE 2001)

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) - \pi\ln x$. En déduire $f(x)$.
3. Montrer que f est continue en 0. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

21. Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\frac{b-\cos t}{a-\cos t}\,\mathrm{d}t$, $(1<a<b)$.

22. Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$ a un et un seul zéro sur $[0,\pi]$.

23. Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$ et $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$.

Exprimer f en fonction de g.

En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

24. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\left(\frac{\sin(nt)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$, avec f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. (Mines 2008)

25. Soit $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin t}\,dt$ et $B_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t}\,dt$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. (Centrale 2005)

1. Montrer que la suite (v_n) est bornée, ainsi que la suite $(A_n - B_n)$ (après avoir montré l'existence des intégrales).
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $A_n = C \ln n + O(1)$ et $B_n = C \ln n + O(1)$.

26. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ et $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, |x| > M \Rightarrow f(x) = 0$. On définit $\widehat{f} : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\widehat{f}$ existe. (Centrale 2005)
2. Montrer que si f est $\mathscr{C}^2$ alors $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\widehat{f}$ est $\mathscr{C}^\infty$.
4. Montrer que $\widehat{f}$ est développable en série entière et que $\widehat{f}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

27. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$. (Centrale 2008)

1. Prouver l'existence de I.
2. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$.

28. Soit $f \in \mathscr{C}^0(]1, +\infty[, \mathbb{R})$, $\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} s\,|f(s)|\,\mathrm{d}s < 1$. (X-Cachan 2014)

On cherche u tel que $u'' + f(t)\,u = 0$ (E).

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0(t) = 1 \\ u_{n+1}(t) = 1 + \displaystyle\int_t^{+\infty} (t-s) u_n(s)\,f(s)\,\mathrm{d}s \end{cases}$. $u_n \in \mathscr{C}^0(]1, +\infty[, \mathbb{R})$.

1. Par récurrence, démontrer que u_n définie bornée de classe $\mathscr{C}^2$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} (1-s)\,u_n(s)\,f(s)\,\mathrm{d}s$ est absolument convergente.
2. Démontrer que $|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leqslant \alpha^{n+1}$
3. En déduire que $\displaystyle\sup_{t\in]1,+\infty[} |u_n(t)| \leqslant \frac{1}{1-\alpha}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction u^*.
5. Montrer que u^* vérifie l'équation différentielle (E).

29. Soit l'application $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(xt)}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$. (Mines 2014)

1. Domaine de définition de f.
2. Donner un développement en série de fonctions de f.

30. Existence et calcul de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^\beta)(1 + x^2)}$ (Mines 2014)

31. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et l'intégrale $I(a, b, c) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x + \frac{1}{x}} - \left(a + \frac{b}{x}\right)^c \right) \mathrm{d}x$ (ENSAM 2014)

1. Discuter de la convergence de $I(a, b, c)$ en fonction de a, b, c des réels.
2. Montrer qu'il existe un unique couple (a, c) tel que $I(a, -a, c)$ converge.

32. Soit l'application f définie par $f(t) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(t^2 + x^2)^\alpha}$, $\alpha > 1$. (Centrale 2013)

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que l'application f est de classe $\mathscr{C}^1$.
3. Discuter l'intégrabilité de f et le démontrer.

33. Ensemble de définition et calcul de $f(x, y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{(t - y)^2 + x^2}\,\mathrm{d}t$.

34. Soit la suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) a_n \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. (X 2019)

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n \, x^n$
2. Donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Soit $E(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \, s^n$. Donner le rayon de convergence de E et calculer $E(s)$.
4. Comment (re)trouver l'expression de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir de $E(s)$?