FEUILLE D'EXERCICES SUR LES INTÉGRALES IMPROPRES.

1. Convergence et valeur éventuelle des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ \mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\ \mathrm{d}t$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^3}$ g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{(1+t^2)}\ \mathrm{d}t$ h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$

2. nature des intégrales impropres suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t.\sin t^3\ \mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{e^t-\cos t}$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}.\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^2\ \mathrm{d}x$

3. Établir, pour $x>-1$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

4. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Étant donnés $f\in E$ et $x\in]0,1]$, on pose $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{t+x}\ \mathrm{d}t$.

1. Prouver la continuité de F sur $]0,1]$, puis montrer qu'on peut prolonger F par continuité en 0.
2. E étant muni de la norme $\|.\|_\infty$ sur $[0,1]$, montrer que l'endomorphisme T : $\begin{pmatrix} E & \to & E \\ f & \mapsto & F \end{pmatrix}$ est continu.

5. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\ln x}{x^2-1}\ \mathrm{d}x$.

6. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|\mathrm{d}t$.

7. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t^2\ln(1-t^2)}{t^2}\ \mathrm{d}t$.

8. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\ \mathrm{d}x$

indication : on pourra dériver $a\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\ \mathrm{d}x$ après justification.

9. Domaine de définition, continuité et dérivabilité de la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-xt^3}}$? calculer f'.

10. Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(t+x)}\ \mathrm{d}t$. ($\lfloor t\rfloor$ désigne la partie entière de t.)

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer $f(n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$?
3. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

11. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2} \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

12. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^2 x+t^2\cos^2 x}}$.

1. Trouver l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la limite en 0 de $f(t)$, et donner un équivalent simple.

13. Soit f une fonction réelle, bornée et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0) \neq 0$.

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et trouver un équivalent de I_n.

14. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

1. Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie pour $x > 0$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
3. On suppose que f admet une limite $\neq 0$ en $+\infty$. Trouver un équivalent de $F(x)$ en 0 à droite.
4. On suppose que f est T-périodique. Trouver un équivalent de $F(x)$ en 0 à droite.

15. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos xt\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\sin xt\,\mathrm{d}t$. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et que l'on a : $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{xf(x)+g(x)}{1+x^2}\right)$ et $g'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f(x)-xg(x)}{1+x^2}\right)$, puis résoudre ces équations.

16. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Étudier f pour calculer $f(1)$.

17. Soit E l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ existe, et :

$$\forall (f,g,h) \in E^3,\ \Delta(f,g,h) = \begin{vmatrix} \int_0^\infty f^2 & \int_0^\infty fg & \int_0^\infty fh \\ \int_0^\infty gf & \int_0^\infty g^2 & \int_0^\infty gh \\ \int_0^\infty hf & \int_0^\infty hg & \int_0^\infty h^2 \end{vmatrix}$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, puis résoudre $\Delta(f,g,h) = 0$.

18. Soit $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de I, puis étudier sa continuité.
2. Montrer que : $\forall t \in [0, n]$, $0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \dfrac{t^2}{n}e^{-t}$
3. En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
4. Montrer que $I(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

19.

1. Quel est le domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t$
2. Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^k k! x^k + R_m(x)$ avec

   $R_m(x) = (-1)^{m+1}(m+1)!x^{m+1}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+xt)^{m+2}}\,\mathrm{d}t$
3. Montrer que $|R_m(x)| \leqslant (m+1)!\,x^{m+1}$ puis que,

   $\forall \varepsilon > 0,\ \forall m \geqslant 1,\ \exists A > 0,\ \forall x \in [0, A],\ \left|f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k k! x^k\right| \leqslant \varepsilon$
4. Quel est le rayon de convergence de $\sum (-1)^k k! x^k$.

   Existe-t-il des réels positifs tels que la série précédente converge ? (Centrale 2002)

20. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée. $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \frac{n.f(t)}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t$. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} I_n$? (Mines 2002)

21. Soit $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)(1+x^2)}}$ avec $a > 0$.
Prouver l'existence de $I(a)$ et déterminer $\lim\limits_{a\to 0^+} I(a)$. (CCP 2002)

22. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$. (Centrale 2018)

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{(2n-1)}{2n}\,u_n$.
3. Montrer que $u_n \sim \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$ où $\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
4. En déduire α.

23. On considère $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t\,\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$ avec $t \in \mathbb{R}_+^*$. (Centrale 2018)

1. L'intégrale est-elle convergente ou divergente ?
2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(t\ln(n))}{n}$.

24. Soit $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\cos u}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u$. Montrer que φ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. (TPE 2002)

25. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ et $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, |x| > M \Rightarrow f(x) = 0$. On définit $\widehat{f} : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\widehat{f}$ existe.
2. Montrer que si f est C^2 alors $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\widehat{f}$ est C^∞. (Centrale 2005)
4. Montrer que $\widehat{f}$ est développable en série entière et que $\widehat{f}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

26. Soit $I =]-\infty, 1[$ et $J = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 1\}$. On définit

$$F(z) = \int_0^1 t^{-z}\frac{\ln t\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer l'existence de F sur J.
2. On considère la restriction de F aux réels appartenant à I :
   (a) Montrer que F est C^∞ sur I,
   (b) Montrer que F est développable en série entière. Donner son développement.

Indication : développer t^{-z} en série entière. (Centrale 2005)

27. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

28. Étant donnée une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$g(0) = f'(0) \text{ et } g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

1. Exprimer $g(x)$ au moyen d'une intégrale dépendant du paramètre x. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $g^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

29. Calculer : $f(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x\sin^2\theta + y\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ (x,y) \neq (0,0)$.

30. Calculer, pour $|x| < 1$, l'intégrale : $I(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{1-2x\cos\theta + x^2}$.
En déduire $f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{2(x-\cos\theta)}{1-2x\cos\theta+x^2}\,\mathrm{d}\theta$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,\mathrm{d}\theta$.