FEUILLE D'EXERCICES SUR LES INTÉGRALES MULTIPLES ET CURVILIGNES.

1. calculer les intégrales doubles suivantes :

$$\iint_D \frac{x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+y+2} \text{ où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq x+y \leq 1\}$$
$$\iint_D xy\sqrt{x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \text{ où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ (x \geq 0) \text{ et } (y \geq 0) \text{ et } (0 \leq x^2+y^2 \leq 1)\},$$
$$\iint_D a^x b^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \text{ où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ (x \geq 0) \text{ et } (y \geq 0) \text{ et } 0 \leq x+y \leq 1\} \text{ avec } a>0 \text{ et } b>0,$$
$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+2} \text{ où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2+y^2 \leq 1\}$$

2. Calculer les intégrales triples suivantes (hors programme PSI mais qui peut le plus peut le moins) :

$$\iiint_D \sin(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ où } D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^3$$
$$\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x+y+z)^2+a^2} \text{ où } D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \text{ et } x+y+z \leq a\}$$
$$\iiint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ où } D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x^2+y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\},$$
$$\iiint_D z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ où } D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x^2+y^2-2x \leq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 0\}$$

3. Calculer $I = \displaystyle\iint_\Delta \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $\Delta : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$

4. Calculer $I = \displaystyle\iint_\Delta \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où Δ est le disque fermé de centre $\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{a}{2}$.

5. On considère la forme différentielle ω sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$w = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\left[(x\sin x - y\cos x)\,\mathrm{d}x + (x\cos x + y\sin x)\,\mathrm{d}y\right]$$

et Γ la courbe orientée formée des demi-cercles de centre O, de rayons a et b $(0 < a < b)$ et des segments $[A,B]$ et $[A',B']$

Calculer l'intégrale curviligne $I(a,b) = \displaystyle\int_\Gamma \omega$. Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{a\to 0\\ b\to+\infty}} I(a,b)$. En déduire l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

6. Sur l'ouvert $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0\}$, on considère la forme différentielle : $\omega = \dfrac{1}{yz}\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{zx}\,\mathrm{d}y + \dfrac{1}{xy}\mathrm{d}z$. Trouver $f : U \to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que la forme $f\omega$ soit fermé.

7. On considère, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la forme différentielle

$$\omega = \frac{(x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^h},\ (h > 0)$$

Pour quelles valeurs de h est-elle fermée? est-elle alors exacte?

8. Domaine de définition et de continuité de $f : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{\sin(ux+vy)}{u+v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ (Mines 2002)

9. On considère la forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$: $\omega = y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$.

a) Conditions sur les applications f et g de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ pour que la forme $\omega - g\,\mathrm{d}f$ soit fermée.

Montrer que f et g sont nécessairement indépendantes de z. Peut-on se donner arbitrairement g (indépendantes de z) et en déduire f ?

b) Les conditions trouvées en a) étant remplies, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, les formes linéaires $\mathrm{d}f\,(x)$, $\mathrm{d}g\,(x)$, $(\omega - g\,\mathrm{d}f\,)(x)$ sont indépendantes.

10. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma x^2\,\mathrm{d}y + y^2\,\mathrm{d}x$, où γ est l'arc paramétré simple sur $\mathbb{R}^2$, arbitrairement orienté, de support (avec $a > 0$ et $b > 0$) :

a) $x^2 + y^2 - ax = 0$; *b*) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ *c*) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{2x}{a} - \dfrac{2y}{b} = 0$

11. a) Calculer le volume et la somme des faces d'un tétraèdre régulier dont les côtés ont a pour longueur.

b) Résoudre les mêmes questions pour un octaèdre régulier (dont les sommets sont les centres des faces d'un cube).