

FEUILLE D'EXERCICES SUR LA RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES.

1. Trouver les valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres associés de l'endomorphisme suivant :

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (-2x + y, 4x + y) \end{pmatrix}$$

2. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension 2, qui admet les valeurs propres 1 et 2. Étudier la suite $n \mapsto (ku)^n(x_0)$, dans laquelle x_0 et k désignent un vecteur et un scalaire donnés.
3. Soit p un entier strictement positif et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $M^p = I_n$. Montrer que si ω est une racine p -ième de l'unité telle que ω^{-1} ne soit pas valeur propre de M , alors :

$$I_n + \omega M + \omega^2 M^2 + \dots + \omega^{p-1} M^{p-1} = 0$$

4. Dans $\mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique on adopte $\sum_{i=1}^n |\xi_i|$ pour norme du vecteur $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

D'autre part on dit que x est positif lorsque, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\xi_i \geq 0$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui transforme tout vecteur positif en un vecteur positif de même norme. Montrer que 1 est valeur propre de u .

5. Existe-t-il des réels α, β, γ tels que la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

admette 1, 2 et 3 pour valeurs propres ?

6. Soit M et A deux matrices carrées d'ordre n , à coefficients complexes telles que $MA = AM$. On suppose que M a toutes ses valeurs propres distinctes.

- a. Montrer que tout vecteur propre de M est un vecteur propre de A .
- b. Montrer que A est de la forme :

$$A = \alpha_0 I_n + \alpha_1 M + \dots + \alpha_{n-1} M^{n-1} \text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{C}$$

7. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$$

Dans le cas où A admet deux valeurs propres distinctes, calculer α_n et β_n .

ENSAM 1999

8. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u .

9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que A est diagonalisable.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A$ et en déduire $\forall n \geq 2, (\alpha_n)$ et (β_n) .

(ENSAIT 1999)

10. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension n , et x un vecteur de E tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E .

- a. Montrer que le seul sous-espace de E stable par u qui contiennent x est E . Énoncer une réciproque.
- b. Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ les coordonnées de $u^n(x)$ dans la base considérée. Vérifier : $u^n = \alpha_0 e + \alpha_1 u + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$.

11. Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme diagonalisable.

On suppose qu'il existe un vecteur v tel que $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ est une famille libre.

Montrer que f a n valeurs propres distinctes.

(ENSI 1999)

- 12.** Objectif : Montrer qu'il existe une base dans laquelle les matrices de u et v sont triangulaires supérieures. Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension d et $\lambda \neq 0$ tels que $v \circ u - u \circ v = \lambda v$.
 1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v^n \circ u - u \circ v^n = \lambda n v^n$. (Centrale 2017)
 2. Montrer que v est nilpotent.
 3. Conclure.
indication : montrer que $\text{Ker}(v)$ est stable par u
- 13.** Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $u^3 = -u$.
 a. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^3/x \notin \text{Ker } u$ alors $(u(x), u^2(x))$ est une base de $\text{Ker}(u^2 + Id)$
 b. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'équation $X^3 = -X$. (IIE 1999)
- 14.** Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & A.M + M.B \end{pmatrix}$.
 a. Soit X un vecteur propre de A , Y un vecteur propre de tB . Montrer que $X {}^tY$ est un vecteur propre de φ . Quelle est la valeur propre associée ?
 b. Soit $\lambda \in \text{Sp}(\varphi)$ et M un vecteur propre associé. Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(\lambda I_n - B)$. En déduire le spectre de φ .
 c. Montrer que si A et B sont diagonalisables, il en est de même de φ .
 Que dire de la dimension des sous-espaces propres ? (centrale)
- 15.** Dans $M_3(\mathbb{R})$, on considère les matrices dont $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est vecteur propre et qui laisse le plan $F : (x + y + z = 0)$ globalement invariant (i.e. F est stable par l'application linéaire canoniquement associée). (centrale 2001)
 a. Caractériser l'ensemble de ces matrices. Est-ce un espace vectoriel ? De quelle dimension ? L'ensemble est-il stable par produit ?
 b. Donner les matrices de cet ensemble se rapportant à une symétrie, puis, à une projection.
- 16.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^3 + 4A = 0$. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.
 a. Montrer que $\widehat{g} = g|_{\text{Im } g}$ est un automorphisme. En considérant $\det(\widehat{g})$, que peut-on dire de $\text{rg}(g)$?
 b. Montrer que si A est non nul alors A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$,
 c. Donner la trace de A^p ($\forall p \in \mathbb{N}$) en fonction de $\text{rg}(g)$. (centrale 2001)
- 17.** Soit $a, b \in \mathbb{K}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.
 Étudier si A est diagonalisable selon les différentes valeurs de a et b .
indication : déterminer certains vecteurs propres en analysant la forme de la matrice. (Mines 2001)
- 18.** Existe-t-il des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ pour $n \geq 2$? (ENSEA 2001)
- 19.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, χ_A son polynôme caractéristique. Soit $\varphi(A) = \sum_{k=0}^{n-1} |\chi_A^{(k)}(1)|$. (Centrale 2008)
 a. $E = \{A \mid \varphi(A) = 0, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$ est-il un espace vectoriel ?
 b. Déterminer $\{A \mid \varphi(A) = 0 \text{ et } A \text{ diagonalisable}\}$
 c. Exhiber une matrice A telle que $\varphi(A) = 0$ et A non diagonalisable.
- 20.** a. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'équation $X^2 = A$. (X 2008)
 b. Montrer que l'on peut trouver X et A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que A nilpotente et $X^2 = A$.

21. On a $f : P \mapsto f(P) = (1 + X^2)P'' - 2.X.P'$.

(Centrale 2008)

a. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_p[X], f(P) \in \mathbb{R}_p[X]$ où $p \in \mathbb{N}$.

Soit f_p l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_p[X]$.

b. f_p est-elle diagonalisable? Trouver ses valeurs propres.

c. Trouver tous les endomorphismes qui commutent avec f_p . En déduire les racines carrées de f_p .

22.

a. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$.

(X 2008)

Montrer que A est une matrice inversible.

b. Soit $\text{Sp}(A)$ le spectre de A . Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$ avec $D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \right\}$.

c. Soit les matrices définies pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \text{ par exemple}$$

Montrer que $\det(x.I_n - A_n) = a_0 + a_1.x + \dots + a_{n-1}.x^{n-1} + x^n$.

d. Étudier les racines de $a_0 + a_1.x + \dots + a_{n-1}.x^{n-1} + x^n$.

Montrer que les racines de $\det(X.I_n - A_n)$ sont de module plus petit que

$$\text{Max}\{1, |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|\}$$

23. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. On note $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ ses valeurs propres. Soit p_i le projecteur de E sur E_{λ_i} parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p E_{\lambda_j}$.

Montrer que p_1 est un polynôme en f . Généraliser à p_i pour $i \in \{1 \dots p\}$.

(Mines 2008)

24. Soit A et M deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $M^2 + M + I_n = 0$ et $A^2 = M$.

(Mines 2008)

a. Montrer que M est inversible.

b. Montrer que $\text{Sp}(M) = \{j, \bar{j}\}$. M est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$?

c. Montrer que n est pair. Calculer $\text{tr}(M)$ et $\det(M)$.

d. A est-elle diagonalisable?

25. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit λ et μ deux réels non nuls avec $\lambda \neq \mu$. Soit u et v deux endomorphismes de E non identiquement nuls. On considère f un endomorphisme de E tel que

(X-Cachan 2016)

$$\begin{cases} f = \lambda u + \mu v \\ f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v \\ f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v \end{cases}$$

1. Trouver un polynôme annulateur de f .

Trouver un polynôme Q_1 tel que $Q_1(f) = u$ et un polynôme Q_2 tel que $Q_2(f) = v$.

2. Montrer que $u \circ v = v \circ u$ et que u et v sont des projecteurs.

3. Montrer que f est diagonalisable et déterminer ses sous-espaces propres.

4. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k = \lambda^k u + \mu^k v$.