Feuille d'exercices sur la réduction des endomorphismes.

1. Déterminer l'inverse, quand cela est possible, de la matrice à coefficients réels :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)I_n$. (CCP 2019)

1. Calculer φ^2.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit diagonalisable. Quelles sont ses valeurs propres ?

4. Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$, puis calculer M^n.

5. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. B est-elle diagonalisable ?
2. montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists(\lambda_p, \mu_p) \in \mathbb{R}^2)/B^p = \lambda_p B + \mu_p I_3$.
3. On suppose : $\exists M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})/M^2 = B$
   (a) M est-elle diagonalisable ?
   (b) Montrer que les sous-espaces propres de B sont stables par M
   (c) Trouver P_1 et P_2 les 2 projecteurs orthogonaux tels que :

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = I_3 \\ P_1.P_2 = P_2.P_1 = 0 \\ B = P_1 - 2P_2 \end{cases}$$

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et ${}^tA$ sont semblables.

7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E tel que $u^3 + u = 0$. Montrer que le rang de u est pair.

8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et P un polynôme à coefficients réels admettant 0 pour racine simple. On suppose que $P(u) = 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$ et que $\mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u = E$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 4A$. Montrer que la trace de A est un entier relatif pair.

10. Trouver les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ telle que $f \circ f \circ f = f \circ f$. (ENSAM 2000)

11. On considère l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $M^2 + {}^tM = I_n$. (CCP 2019)

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de M alors les valeurs propres de M sont des racines de P.
2. On suppose M symétrique. Montrer que M est diagonalisable puis que $\det(M)\,\mathrm{Tr}(M) \neq 0$
3. M n'est plus symétrique, montrer que M est diagonalisable.
4. Montrer que : « M inversible $\iff$ 1 n'est pas valeur propre ».

12. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4, et soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.

Soit s l'endomorphisme de E ayant pour matrice dans la base $\mathscr{B}$: $S = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Trouver les vecteurs propres et les sous-espaces propres de s. Interpréter géométriquement s. Déterminer sans calcul S^{-1}.
2. Pour tout i compris entre 1 et 4, on pose $e'_i = s(e_i)$. Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$. Justifier le fait que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

Soit $M(a,b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$ et soit $L = \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

3. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base formées de vecteurs propres de $u_{(a,b)}$, l'endomorphisme de E associé à $M(a,b)$ dans la base $\mathscr{B}$. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que $M(a,b)$ soit inversible.
4. Calculer $[M(a,b)]^{-1}$ lorsque $M(a,b)$ est inversible et montrer que $[M(a,b)]^{-1}$ appartient à L.
5. Montrer que si (a,b) et (a',b') sont des couples de réels, alors il existe un couple (a'',b'') de réels tel que $M(a,b) \times M(a',b') = M(a'',b'')$.
6. Si t est un réel, on pose $N(t) = M(\mathrm{ch}(t), \mathrm{sh}(t))$ et on note L' l'ensemble des matrices $N(t)$ quand t décrit $\mathbb{R}$.

   Montrer que L' est un sous-groupe commutatif de $GL_4(\mathbb{R})$ et que l'application N de $\mathbb{R}$ dans L' qui à t associe $N(t)$ est un isomorphisme de groupes.
7. Déterminer $O(4) \cap L$ où $O(4)$ est l'ensemble des matrices réelles orthogonales d'ordre 4 (on rappelle que $A \in O_4(\mathbb{R}) \iff {}^tA \times A = I_4$)

13. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Montrer que A est la somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente qui commutent.
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer que : $\exists x \in \mathbb{R}^3 \mid \{x, f(x), f^2(x)\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure), à l'aide des résultats précédents. (Centrale 2002).

14. Étude dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Étudier l'ensemble des rotations d'angle θ.

1. Trouver les valeurs propres des rotations en fonction de θ. En déduire l'ensemble des rotations dont la matrice représentative vérifie : $A^2 + A + I = 0$;
2. Soit $(P,Q) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P + iQ \in GL_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^*/P + x.Q \in GL_n(\mathbb{R})$
3. Montrer que si deux matrices réelles sont semblables dans le corps des complexes alors elles sont semblables dans le corps des réels.
4. Montrer l'équivalence des 2 propriétés suivantes :
   (a) A admet $P(X) = X^2 + X + 1$ comme polynôme annulateur
   (b) A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
5. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 + f^2 + f = 0$.

   Montrer que la matrice de f est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ si $f \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ (Centrale 2002).

15. Soit $A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$. Calculer A^n. (Centrale 2006)

16. Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ avec $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $A = U.{}^tU$.

1. Déterminer le rang de A.
2. Quel est le polynôme caractéristique de A ?
3. A est-elle diagonalisable ?

Mêmes questions avec $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n$. (Centrale 2006)

17. Soit $f \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & Q(X) \end{array} \right)$ où $Q(X) = (X^2 - 1)P'(X) - 2(2X + 1)P(X)$.
Montrer que f est une application linéaire de $E = \mathbb{R}_4[X]$ dans E.
Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
f est-elle diagonalisable ? (Centrale 2006)

18. Soit $E = \{f \mid f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et } f(0) = 0\}$. On définit $T : E \to E$ par :

$$T(f)(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0 \\ \star \text{ si } x = 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Choisir $\star$ pour que T soit un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de T. (Mines 2006)

19. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence p ($f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\forall k < p,\ f^k \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$). On définit l'application $\Phi_f : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ g & \mapsto & f \circ g - g \circ f \end{array} \right)$.

1. Montrer par récurrence : $\Phi_f^n(g) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g \circ f^k$.
2. En déduire que Φ_f est nilpotent. Trouver un majorant de l'indice de nilpotence.
3. Soit a un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un endomorphisme b de E tel que $a \circ b \circ a = a$.
4. En déduire la valeur de l'indice de nilpotence de Φ_f.
5. Quelles sont les valeurs propres de Φ_f ?
   La réciproque (Φ_f nilpotente $\Rightarrow$ f nilpotente) est-elle vraie ? (X-Cachan 2009)

20. Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit un vecteur propre associé à la valeur propre -2.

21. Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Soit λ une valeur propre non nulle de $u \circ v$. Montrer que λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. Montrer que cette propriété reste valable pour $\lambda = 0$ si E est de dimension finie.
3. On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et on pose pour $P \in E,\ u(P) = P'$ et $v(P) = x \mapsto \int_0^x P(t)\, \mathrm{d}t$.
   Calculer le noyau de $u \circ v$ et celui de $v \circ u$. Conclusion ?

22. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le rang de A. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Donner les éléments propres de la matrice A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

23. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable mais non diagonalisable puis donner une base qui trigonalise la matrice A.

24. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice M possède une unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ et que λ est comprise entre 1 et 2.
2. Soit $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une valeur propre de M. Calculer $\lambda\, |\sigma|^2$ et comparer $|\sigma|$, 1 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Montrer que la famille (I_3, M, M^2) est libre. Calculer M^3 comme combinaison linéaire de I et de M.
   En déduire :
$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ M^{n+3} = \alpha\, M^{n+1} + \beta\, M^n$$