FEUILLE D'EXERCICES SUR LES SÉRIES.

1. Convergence et somme (quand elle converge) de :

$\sum \frac{n^2+n-3}{n!}$ $\qquad \sum \frac{n}{n^4+n^2+1}$ $\qquad \sum \frac{(-1)^n}{n+1}$

$\sum \arctan \frac{2}{n^2}$ $\qquad \sum \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ $\qquad \sum \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$

2. Étudier les séries de termes généraux :

$\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}$ $\qquad \tan\left(\frac{\pi n}{4n+1}\right) - \cos\frac{\pi}{n}$ $\qquad \sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+kn}$ $\qquad \frac{1}{(1+1/\sqrt{n})^n}$

$\frac{1}{(1+1/\sqrt{n})^{n\sqrt{n}}}$ $\qquad \sin(\pi\sqrt{n^2+an+b})$ $\qquad \frac{\cos\left(2n\frac{\pi}{3}\right)}{n}$ $\qquad \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

$\frac{(-1)^n n\cos n}{n\sqrt{n}+\sin n}$

3. On considère la suite de terme général (u_n) : $u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \ldots + \frac{1}{4n-1}$.

Étudier la convergence de cette suite. En donner la limite.

Trouver, quand n tend vers $+\infty$ un équivalent de $\ell - u_n$. (INT 2001)

4. Prouver que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a : $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n$

5. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs, discuter la nature de la série $\sum v_n$ avec $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$.

6. Compléments à la règle de d'Alembert

Soit $\sum a_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+^\star$, telle qu'au voisinage de $+\infty$ on ait :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Montrer que :

- si $\alpha < -1$ alors la série $\sum a_n$ est convergente,
- si $\alpha > -1$ alors la série $\sum a_n$ est divergente,
- pour $\alpha = -1$, trouver un exemple où la série $\sum a_n$ est convergente et un exemple où la série $\sum a_n$ est divergente.

7. Pour $p \in \mathbb{N}$, étudier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{\ln^p n}$.

8. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs ; montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{1+u_n}$ converge. Que peut-on dire si la série $\sum u_n$ diverge ?

9. Soient P et Q deux polynômes ; discuter la convergence de la série de terme général $\frac{P(n)}{Q(n)}$, puis celle de la série de terme général $(-1)^n\frac{P(n)}{Q(n)}$. (Mines 2021)

10. Prouver la convergence de la série de terme général $\frac{\sin n}{2^n}$ et calculer sa somme.

11. Trouver un équivalent simple de $A_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha > 1$ puis de $B_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$ pour $\alpha > 1$

12. convergence de la série $\sum \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ pour $n \geq 1$.

13. Trouver un équivalent simple en $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \ln k$ avec $\alpha > 1$ (Centrale 2003)

14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $u_0 = \alpha \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$. (ENS 2021)

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - u_{n+1}$.
   (a) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$?
   (b) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^3$?
3. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.
   (a) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$?
   (b) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$?
4. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$?

15. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{th} k\right) - n$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2) On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, trouver un équivalent simple de $(\ell - u_n)$.

16. Équivalent de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{1+n^2x^2}$ en 0.

indication : trouver un encadrement à l'aide d'intégrales. (Centrale 2001)

17. Soit e la somme de $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!}$ et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k!}$.

1. Montrer que $\dfrac{1}{n+1} \leqslant n!R_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. Nature de $\sum \sin(n!e\pi)$ (CCP 2001)

18. Étudiez la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}) \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

(TPE 2001)

19. Soit $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k^2+1}{\sqrt{k^4+4}}$. Convergence ? limite ? (Mines 2003)

20. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. $v_n = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n} u_k}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+u_k)}$

— Montrer que (v_n) admet une limite $\ell \in [0,1]$

— Montrer que $\ell \neq 0 \iff \sum \dfrac{1}{u_n}$ convergente (Mines 2003)

21. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}/u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ avec $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

— Montrer que la série $\sum v_n$ diverge.

— Montrer que quand n tend vers $+\infty$, $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ (CCP 2003)

22. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Soit $v_n = u_n \ln u_n$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^\alpha \ln n}$.
2. Trouver une suite (u_n) telle que $\sum v_n$ soit convergente.
3. Trouver une suite (u_n) telle que $\sum v_n$ soit divergente. (Centrale 2010)

23. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + x_n^2$

1. Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = (\frac{1}{2^n}).\ln(x_n)$.
   Montrer que la suite (u_n) converge.
   Indication : on pourra considérer une somme télescopique. (Mines 2010)

24. Étudier la série de terme général $\dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt{n}\sqrt{n+(-1)^n}}$. (Mines 2010)

25. Soit $u_n = \dfrac{4n}{n^4+2n^2+9}$. Prouver la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme.
indication : $n^4 + 2n^2 + 9 = (n^2+3)^2 - 4n^2$. (Centrale 2009)

26. Déterminer la convergence de la série de terme général (u_n) défini pour tout entier n non nul par $u_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{(-1)^n+\sqrt{n}} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. (Centrale 2009)

27. Convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}\left(\frac{\lambda^2-1}{(\lambda-2)^2}\right)^n$. (Centrale 2009)

28. On considère la série $\sum u_n$ où $u_n = \left(n^{1/n}-1\right)^{Cn^\lambda}$ où $C \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
Déterminer la nature de la série $\sum u_n$. (Mines 2009)

29. Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs.

Soit $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ et $b_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka_k,\ B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

- Relier A_n, B_n et b_n.
- Montrer que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature. (Mines 2005)

30. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{(\ln(n))^{\ln(\ln n)}}$. La série $\sum u_n$ est-elle convergence ? (Centrale 2010)

31. Soit $f \in \mathscr{C}^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = p$ avec $p \in \mathbb{R}_+^*$. (X-Cachan 2012)

Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge
2. Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^p-1}{p} f(n)$
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p}{e^p-1} \int_1^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t$.
4. Donner un équivalent « simple » de $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} 2^k \ln(k)$.

32. On considère la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + \frac{1}{n+1}}$.

(i) calculer $u_{n+2} - u_n$ et montrer que la suite de terme général $v_n = u_{2n+1}$ est croissante, et majorée par 1.
(ii) On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n < 1$; montrer que la suite de terme général $(n+1)(v_{n+1} - v_n)$ a une limite non nulle.
(iii) montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

33. $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{(-1)^n\, n^\alpha}{n^{2\alpha}+(-1)^n}$. (ENS 2021)

1. Pour quelles valeurs de α la série des a_n converge absolument ?
2. Pour quelles valeurs de α la série des a_n converge ?
3. Donner un équivalent de (a_n) ? Que remarquez-vous ?