

FEUILLE D'EXERCICES SUR LES SÉRIES.

1. Étudier les séries qui ont pour termes généraux (
- $n \geq 1$
-) :

$$\frac{n-1}{n(n+1)(n+2)} \quad \frac{1+\ln n}{n\sqrt{n}} \quad \frac{a^n}{1+b^n} \quad \arccos\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\arctan\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \arctan\sqrt{1-\frac{1}{n}} \quad \frac{n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)} \quad na^{\sqrt{n}} \quad a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$$

2. Relations d'inclusion entre les ensembles suivants :

$$E = \{(u_n)_{n \geq 0} \mid \sum_{n \geq 0} |u_n| < \infty\}, \quad F = \{(u_n)_{n \geq 0} \mid \sum_{n \geq 0} \frac{|u_n|}{1+n^2} < \infty\},$$

$$G = \{(u_n)_{n \geq 0} \mid \sum_{n \geq 0} |u_{n+1} - u_n| < \infty\}, \quad H = \{(u_n)_{n \geq 0} \mid \sum_{n \geq 0} \frac{|u_n|}{1+n} < \infty\}, \quad (\text{Cachan 2000})$$

3. Prouver la convergence et calculer la somme des séries de termes généraux :

$$\frac{n-1}{n(n+1)(n+2)} \quad \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

4. Soit
- $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$
- une injection. On pose
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\varphi(n)}{n^2}$
- . Étudier la nature de la série
- $\sum u_n$

5. Soit
- $u_n = \frac{1}{\tan(\pi/4 + 1/n)} - 1$
- pour
- $n \in \mathbb{N}^*$
- . Quelle la nature de la série
- $\sum u_n$
- ?

6. Nature de la série
- $\sum u_n$
- où
- $u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$
- .

7. Soit
- $\sum u_n$
- une série divergente à termes positifs. On pose pour tout
- $n \in \mathbb{N}$
- :

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}, \quad w_n = \frac{u_n}{1+nu_n}, \quad x_n = \frac{u_n}{1+n^2u_n}, \quad y_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}.$$

Étudier la nature des séries $\sum v_n, \sum w_n, \sum x_n, \sum y_n$.

8. Nature de la série
- $\sum u_n$
- où
- u_n
- vaut
- $-\frac{1}{n}$
- si
- n
- est un carré et
- $\frac{1}{n}$
- sinon.

9. Étudier la série de terme général
- $u_n = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}{e^{\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right]} - 1} - 1$
- .

10. Discuter suivant
- $\alpha \in \mathbb{R}$
- la nature de la série
- $\sum \left(\frac{4}{\pi} \arctan \frac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha}$
- .

11. On considère la série de terme général
- $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
- . Montrer que la série
- $\sum u_n$
- converge et donner

$$\text{un équivalent du reste } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

12. Soit
- x
- et
- φ
- deux réels, étudier la nature des séries :

$$1 + x \cos \varphi + x^2 \cos 2\varphi + \dots + x^n \cos n\varphi + \dots$$

$$x \sin \varphi + x^2 \sin 2\varphi + \dots + x^n \sin n\varphi + \dots$$

13. Étudier les séries de terme général

$$\frac{(-1)^n n^2}{\sqrt{n^5+1}} \quad n! \sin x \sin \frac{x}{2} \dots \sin \frac{x}{n} \quad \frac{x^n + n}{nx^n + 1} \quad \frac{x^n}{\sqrt{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}}$$

14. Pour
- $\alpha > 1$
- et
- $n \in \mathbb{N}^*$
- , on pose
- $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$
- ,
- $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$
- et
- $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$
- .

Étudier la nature de la série de terme général $v_n = \frac{R_n}{S_n}$.

15. Nature de la série de terme général $u_n = \int_n^{2n} \frac{dt}{1+t\sqrt{t}}$?

16. Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On pose $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ pour tout entier n et on suppose que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{2n} \leq (1 + \frac{1}{n}) U_n$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

17. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda}}$.

18. On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n + 1}{2}} \end{cases}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - x_n$.

1) Étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

19. On pose, pour tout entier naturel non nul n , $u_n = \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt[n]{n}}$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Soit v la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_n}{n}$. Quelle est la nature de la série $\sum v_n$.

20. À la suite réelle (a_n) , $a_n \geq 0$, $n \geq 1$, on associe la suite (b_n) telle que $b_n = \frac{1}{n} \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$. On pose

$A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Enfin on introduit, pour $k \geq 1$, $S_k = \sum_{\frac{k}{2} \leq j \leq k} \frac{1}{j}$, sommation sur les entiers j

satisfaisant à la double inégalité $\frac{k}{2} \leq j \leq k$.

Ainsi, par exemple, $S_3 = \sum_{\frac{3}{2} \leq j \leq 3} \frac{1}{j} = \sum_{j=2}^3 \frac{1}{j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ et $S_4 = \sum_{j=2}^4 \frac{1}{j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$.

Le logarithme népérien de x sera noté $\ln(x)$.

1. Montrer que la suite (S_k) est majorée en indiquant un majorant M .

2. Prouver que $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \ln(2)$. (on peut encadrer S_{2k} par deux intégrales.)

3. Établir que $B_n \leq cA_{2n}$, où $c > 0$ est une constante à préciser en fonction de M .

4. À l'aide de ce qui précède, comparer les convergences des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

5. Montrer que $S_k \geq \ln(2)$. En déduire que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont en fait de même nature.

21. convergence de la somme des (u_n) pour $n \geq 2$ où $u_n = \frac{1}{\ln n!} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (CCP 2000)

22. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$. (Centrale 2011)

1. Étudier la série de terme général u_n .

2. La série est-elle absolument convergente ?

3. Étudier la série de terme général $v_n = \sin(u_n)$.

23. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$. (Centrale 2011)

1. Prouver la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On notera ℓ sa limite.

remarque : redémontrer la convergence des séries de Riemann.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2(S_n^\ell - \ell^{S_n})$ est convergente et calculer sa limite.

24. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \arccos \left(2 - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \sqrt[p]{p} \right)$. (Centrale 2011)

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

2. Étudier $\sum_{n \geq 0} u_n$.

25. Soit deux réels $x_0 > 0$ et $\alpha > 0$. On considère la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^\alpha}$. (Mines 2011)

1. Trouver la limite de la suite (x_n) .

2. Trouver un réel β tel que la suite $(x_{n+1}^\beta - x_n^\beta)$ converge vers un réel $\ell \neq 0$.

3. Trouver un équivalent de (x_n) .

26. Étudier la série de terme général $(-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n^\alpha}$. (ENSAM 2011)

27. Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2) \end{cases}$ (ENSAM 2011)

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

2. On définit $v_n = 2^n u_n$. Étudier la convergence de la suite (v_n)

28. Étudier la série de terme général $\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1} + (-1)^n}$. (Mines 2010)

29. 1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que la série de terme général $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ converge.

2. Pour les valeurs de a et b obtenues, calculer la somme de cette série.

3. Trouver un équivalent simple du reste d'ordre n .

30. Déterminer la limite de $\left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$.

31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p[n]$ le nombre de chiffres de n dans son écriture en base 10.

Après avoir vérifié l'existence de $\sum_{n \geq 1} \frac{p[n]}{n(n+1)}$, calculer sa somme.

32. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour que pour toute série convergente à termes réels $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(u_n)$ converge, il faut et il suffit qu'il existe un intervalle $[-a, a]$ ($a > 0$) sur lequel f est linéaire (on pourra commencer par établir qu'il doit exister un tel intervalle sur lequel f est impaire).

33. La série $\sum_{n \geq 1} \sin \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \right)$ est-elle convergente ? (Centrale 2018)

34. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive décroissante et $p_n = u_{n-1} - u_n$. (Centrale 2018)

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{n \geq 1} p_n$ converge.

2. Montrer que $\sum_{n \geq 1} n p_n$ converge $\iff \sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Montrer qu'en cas de convergence, on a l'égalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

35. Exo 1 : On définit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$. (Mines 2018)

1. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Donner la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

3. Donner la nature de la série de terme général a_n^2 .

4. Étudier la série de terme général $\ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$. Donner la nature de $\sum_{n \geq 0} a_n$