FEUILLE D'EXERCICES SUR LES SÉRIES ENTIÈRES.

1. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence strictement positifs R et R'. Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum a_n b_n z^n$?

2. Montrer que $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n \dfrac{nz^n}{n^2+n-2}$ ont même rayon de convergence.

3. Soit $\varphi(n)$ le nombre des chiffres dans l'écriture décimale de $n \in \mathbb{N}$.
Trouver le rayon de convergence des séries entières : $\sum \varphi(n) z^n$ et $\sum a^{\varphi(n)} z^n$ pour $a \in \mathbb{R}$.

4. Trouver le rayon de convergence et étudier sur le cercle de convergence la série entière $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n z^n$, où n_0 est selon le cas 0, 1 ou 2 et où a_n désigne successivement :

$$\int_0^1 t^n e^{-t} \mathrm{d}t, \qquad n^{\ln n}, \qquad n^{(-1)^n}, \qquad \arctan n^\alpha.$$

5. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \ell,\ (\ell \in \mathbb{R})$$

On suppose en outre que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence infini.

Montrer qu'il en est de même pour la série entière $\sum b_n z^n$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n t^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n} \right) = \ell.$

6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente, et a sa limite.

a) trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} t^n$.

b) On pose : $f(t) = \sum \dfrac{a_n}{n!} t^n \quad (t \in \mathbb{R})$. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} (e^{-t} f(t))$.

7. Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, trouver le rayon de convergence et donner une expression aussi simple que possible de la somme :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{1+2+\ldots+n} \qquad \sum_{n\geq 3} \frac{t^n}{n(n-1)(n-2)} \qquad \sum \frac{t^{3n}}{(2n)!} \qquad \sum \frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) t^n$$

8. Montrer que $f_k(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^k t^n}{n!}$, $(k \in \mathbb{N}^\star)$, est de la forme $P_k(t).e^t$, où P_k est un polynôme de degré k.
Exprimer P_k au moyen de P_{k-1}.

9. Soit $f : [0, a[\to \mathbb{R},\ (a > 0)$, une application de classe C^∞ telle que $f \geq 0$ et $f^{(k)} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.
Montrer que f coïncide sur $[0, a[$ avec la somme de sa série de Mac-Laurin.
Montrer que $t \mapsto \operatorname{tg} t$ est développable en série entière sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

10. Soit f une fonction de la variable réelle à valeurs complexes, indéfiniment dérivable sur un voisinage de 0. On suppose qu'il existe $r > 0$, et deux réels k et M tels que

$$\forall t \in [-r, r],\ \forall n \in \mathbb{N}\ \left| f^{(n)}(t) \right| \leq M k^n n!$$

Montrer que f est développable en série entière à l'origine.

11. Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \big(\ln(1+x)\big)^2$

12. En dire le maximum sur la série $\sum \dfrac{n+3}{n+2} x^n$. (Navale 1999)

13. Rayon de convergence et somme de la série $\sum \dfrac{3\,x^n}{(n+1)!}$. (Ensi 1999)

14. Trouver le rayon de convergence de $\sum \sin\left(n\dfrac{\pi}{3}\right) x^n$ et calculer la fonction somme. (Ensi 1999)

15. Trouver le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \dfrac{n}{n+2} x^n$ (Ensi 1999)

16. Développer en série entière au voisinage de 0 $r \mapsto P(r,t) = \dfrac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}$.

Calculer pour $h \in \mathbb{Z}$ et r au voisinage de 0 $\displaystyle\int_0^{2\pi} P(r,t-\theta)\cos(h\theta)\mathrm{d}\theta$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} P(r,t-\theta)\sin(h\theta)\mathrm{d}\theta$ (IIE 1999)

17. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}\cos(n^2 x)$.

1) Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer le rayon de convergence de la série de Taylor de f.

3) f est-elle développable en série entière? (Centrale 2001)

18. Soit I_n le nombre d'involutions de $\mathbb{N}_n$ (permutations de carré l'identité).
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$.
Trouver $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n \frac{x^n}{n!}$. En déduire I_n. (Centrale 2001)

19. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$

a) ensemble de définition de $\mathcal{D}$?

b) expression explicite de f sur $\mathcal{D}$

c) en déduire $\sum \dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}$ (CCP 2001)

20. Rayon de convergence de $\sum d(n)x^n$ où $d(n)$ est le nombre de diviseur de n. (Navale 2001)

21. On considère la série entière $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$.

1) Déterminer R le rayon de convergence. On note $S(x)$ la somme de cette série.

2) Calculer $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q \mathrm{d}t$. En déduire $I_{n,n}$

3) Déterminer $S(x)$, $\forall x \in]-R,R[$. (ENSAM 2001)