# FEUILLE D'EXERCICES SUR LES SÉRIES ENTIÈRES.

**1.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$

a) Montrer que $\exists C \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n| \leq C3^n$ et $|v_n| \leq C3^n$

b) Calculer le rayon de convergence et la somme des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{u_n x^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{v_n x^n}{n!}$.

**2.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ où $a_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$

**3.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développable en série entière de rayon $R > 1$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^n \mathrm{d}x = 0$.
Montrer que $f = 0$ sur $D_R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < R\}$

**4.** Développer en série entière à l'origine les fonctions réelles suivantes :

a) $f : \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^z \sin z \end{pmatrix}$ b) $g : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$ c) $h : x \mapsto (\arcsin x)^2$

**5.** Développer en série entière à l'origine les fonctions réelles $f$ suivantes données par $f(x)$ :

a) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ b) $\dfrac{1}{1 - 2x \operatorname{ch} \alpha + x^2}$ c) $\dfrac{\ln 1 + x}{1 + x}$ d) $\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$

**6.** Montrer que $d : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t - x \sin t)} \mathrm{d}t \end{pmatrix}$ est à valeurs réelles. Développer $f$ en série entière à l'origine.

**7.** Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes, $(x \in \mathbb{R})$ :

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n+1}{2n^2+n-1} x^n$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(2n-1)}$ 3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \sin n\alpha}{n!}$

**8.** Étudier le rayon de convergence de la série entière $\sum \ln\left(\dfrac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) x^n$.
Étude aux bornes de l'intervalle de convergence.

**9.** Soit $a_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} (2 - \sqrt[k]{2})$. Nature de $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} a_n$? rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} a_n z^n$ et étudier le cas $|z| = R$?

**10.** Étude de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$, avec $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin^{2n} t e^{-\alpha t} \mathrm{d}t$, où $\alpha$ est un réel strictement positif.

**11.** Développer en série entière au voisinage de 0 : $f(x) = \operatorname{argth}\left(\dfrac{x \operatorname{ch} a}{1 - x \operatorname{sh} a}\right)$.

**12.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels.

**1)** Étudier la convergence de $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ et $g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

**2)** Montrer l'existence, pour $x \in ]0,1[$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t/x} f(t) \mathrm{d}t$.

**3)** Montrer que, pour $x \in ]0,1[$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t/x} f(t) \mathrm{d}t = xg(x)$.

**13.** On pose, lorsque ceci a un sens, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

**1)** Montrer que $f$ est définie sur $[-1, 1]$.
**2)** Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$.
**3)** Étudier le développement en série entière à l'origine de $f$.

**14.** On considère la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ et on note $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.

1) Trouver l'ensemble de définition de $S$ que l'on notera $D$. Trouver l'ensemble de définition de $x \mapsto S(1-x) + S(x)$ que l'on notera $D_1$

2) Continuité de $S$?

3) Exprimer $S\left(\frac{1}{2}\right)$ à l'aide de $x \mapsto S(x) + S(1-x) + \ln(x)\ln(1-x)$ (ccp 2000)

**15.** Soit $f$ la fonction définie par : $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}$.

a) Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$,

b) Développer $f$ en série entière.

**16.** Soit $f : x \mapsto x^x$, $x$ réel $> 0$; On peut noter $f^{(n)}(x)$, ou $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, ou $\mathrm{D}^n f$, pour la dérivée $n^{ième}$ de $f$.

1) Dresser un tableau de variations de $f$, et dessiner sa courbe représentative.

2) On pose $c_n = \dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}$. Calculer $c_1$ et $c_2$.

3) Établir que $y = f(x)$ satisfait à l'équation différentielle $y' = y \ln x + y$.
En déduire la relation $c_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(c_n + \dfrac{c_{n-1}}{1} - \dfrac{c_{n-2}}{2} + \dfrac{c_{n-3}}{3} - \dfrac{c_{n-4}}{4} + \dots\right)$

4) Démontrer que $|c_n| \leq 1$. Qu'en déduit-on pour le rayon de convergence $R$ de la série $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$?

5) Prouver que $f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n (x-1)^n$ sur un intervalle $J$ ouvert que l'on précisera. (e3a 1999)

**17.** Soit $(a_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$. On note : $\forall |z| < 1,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose de plus que $f$ est bornée sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, montrer que $f$ est polynomiale.

Indication : on pourra utiliser $g(\rho, \theta) = f(\rho e^{i\theta})$ où $\begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$ (Mines 2000)

**18.** Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) x^n$.

– Domaine de convergence de $f(x)$?

– Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) x^n$ (Centrale 2002)

**19.** Développer la fonction suivante en série entière :

$$f(x) = \frac{x \operatorname{sh} \alpha}{x^2 - 2x \operatorname{ch} \alpha + 1},\ \alpha \neq 0$$

(ENSI 2002)

**20.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f$.

1) Montrer que $\forall t \in ]0, R[,\ 2\pi a_n t^n = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t.e^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta$

2) On suppose que $R = +\infty$ et $f$ bornée. Que dire de $f$? (TPE 2002)