FEUILLE D'EXERCICES SUR LES SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS.

1. Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'application définie par :
$f_n(t) = \dfrac{1}{1+\frac{p}{n}}$ si $t \in \left]\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}\right]$, pour $p \in [\![1,n]\!]$, $f_n(0) = 1$.
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue ;
La convergence est-elle uniforme ?

2. Soit (f_n) qui converge uniformément vers f continue sur $[0,1]$ et (x_n) qui converge vers x. Montrer que $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$. Donner un contre-exemple si (f_n) ne converge pas uniformément.

(Centrale 2001)

3. Étudier la convergence simple, puis uniforme, de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(t) = \dfrac{nt^2}{1+nt}$ si $t \in \mathbb{R}_+$ et $f_n(t) = \dfrac{nt^3}{1+nt^2}$ si $t \in \mathbb{R}_-$

4. Étudier la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n : x \longmapsto \dfrac{(x+1)^n - 1}{(x+1)^n + 1}$. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[1, +\infty[$.

(Navale 1999)

5. Étudier les convergences simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(t) = n \cos^n t \sin t,\ \ t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$,
2. $f_n(t) = \dfrac{\sin nt}{n\sqrt{t}},\ \ t \in \mathbb{R}_+^\star$ et $f_n(0) = 0$,
3. $f_n(t) = \dfrac{\sin^2 nt}{n \sin t}$, si $t \notin \pi\mathbb{Z}$, $f_n(k\pi) = 0$ pour $k \in \mathbb{Z}$,

6. Soit $p(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{xn+1}$ $(x > 0)$. La fonction p est-elle continue sur $]0, +\infty[$?
Montrer que $p(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x + 1}$.

(CCP 2001)

7. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continue, qui n'est pas l'application nulle, vérifiant :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$$

1. On considère les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par $f_n(t) = f(nt)$ et $g_n(t) = f\left(\dfrac{t}{n}\right)$. Montrer que, sur $\mathbb{R}_+$, ces deux suites convergent simplement vers l'application nulle, sans converger uniformément,
2. Montrer que $(f_n/n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(g_n/n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ convergent uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

8.
1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = \lim_{n\to-\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t.$$

2. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie (pour $n \in \mathbb{N}^\star$) par :

$$f_n(t) = e^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \text{ pour } t > -n, \qquad f_n(t) = e^t \text{ pour } t \leqslant -n$$

Montrer que la restriction de f_n à $\mathbb{R}_+$ est croissante et en déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge uniformément vers 0 sur tout segment de $\mathbb{R}_+^\star$.
Montrer que la restriction de f_n à $\mathbb{R}_-$ est positive, atteint son maximum en un point x_n et que la suite (x_n) admet -2 pour limite.
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_-$.

9. On pose $f_n(t) = \dfrac{1}{n + t^2 n^2}$

1. Étudier la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ du point de vue de la convergence simple et de la convergence uniforme.
   En cas de convergence, on note $\varphi = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$. Trouver la partie principale de φ, au voisinage de $+\infty$.

10. On pose $f_n(t) = \operatorname{th}(n+t) - \operatorname{th} n$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge sur $\mathbb{R}$, et que sa somme s est une fonction croissante et continue. La convergence est-elle uniforme ?
2. Étudier la série de terme général $u_n = 1 - \operatorname{th} n$.
3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $s(t+1) = s(t) + 1 - \operatorname{th} t$.

11. Étude de $\sum \dfrac{n^\alpha}{n^2+1} x e^{-nx}$. ENSAM 1999

12. Théorème de Stone-Weierstrass
On désigne par C^0 l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit C^0 de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

1. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On lui associe le polynôme $B_n(P)$ définie par :
$$B_n(P) = \sum_{k=0}^{n} P(k/n) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$
   Montrer que : $B_n(X.P) = \dfrac{X(1-X)}{n} (B_n(P))' + X B_n(P)$.
   Calculer $B_n(1)$, $B_n(X)$, $B_n(X^2)$.
2. Montrer la relation :
$$\sum_{k=0}^{n} (k - nX)^2 \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$$
   En déduire que, si $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ et si $t \in [0,1]$ sont donnés, en notant $A_n = \left\{ k \in [\![0,n]\!] \mid \left| \dfrac{k}{n} - t \right| \geqslant \alpha \right\}$, on a :
$$\sum_{k \in A_n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4\alpha^2 n}$$
3. Soit $f \in C^0$. On lui fait correspondre la fonction polynôme définie sur $[0,1]$ par :
$$B_n(f)(t) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$
   En admettant le théorème de Heine qui nous dit que toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment, montrer que f est la limite uniforme sur $[0,1]$ de la suite des fonctions polynômes $(B_n(f))$. [1]

13. Justifier la définition et la continuité de la fonction $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \arctan(x+n) - \arctan n \end{pmatrix}$
Trouver une expression simple de $f(x+1) - f(x)$.
Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.

14. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{k}{n} \right)^n$.

---

1. f uniformément continue sur $I \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \,/\, \forall (x,y) \in I^2,\ |y - x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

15. Soit, pour tout entier n, $u_n(x) = 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)$. (X 2010)

1. Montrer que $\sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta)$.
2. Calculer $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ et $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.
3. Trouver les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels $\sum u_n$ converge uniformément.

16. Soit $u_n : \; x \;\; \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n^2}\right)^n & \text{si } x < n^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (X-Cachan 20014)

1. Montrer que (u_n) converge simplement vers une fonction f à déterminer. La convergence est-elle uniforme ?
2. Soit f un application continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$. Montrer que l'application f admet un minimum et un maximum sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soit $a_n \geqslant 0$ le terme général d'une série convergente telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

   Montrer que la série $\sum a_n f(u_n(x))$ converge.

17. Pour tout entier n, f_n définie sur $\mathbb{R}^+$, α réel (Centrale 2014)

$$f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f à déterminer.
2. Condition sur α pour avoir convergence uniforme
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, \mathrm{d}x$ pour $\alpha = 1/2$

18. On pose $S(x) = \sum_{n\geqslant 1} \exp(-x.\sqrt{n})$. (Navale 2014)

1. Pour quelles valeurs de x, S est-elle définie ?
2. Prouver la convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[,\ a > 0$.
3. Montrer que S est continue en 1.
4. Calculer la limite de S en $+\infty$.
5. Montrer que la fonction S est décroissante
6. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$

19. Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = t \mapsto \frac{t^n \ln(t)}{H_n}$. (Centrale 2012)

1. Sur quelle intervalle la série de terme général $u_n(t)$ converge simplement ?
2. Montrer que pour tout $a < 1$, il y a convergence normale sur $]0, a]$ mais pas sur $]0, 1]$.
3. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $]0, 1]$.

20. Fonction continue dérivable nulle part

Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(2\pi 100^n x)}{10^n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f continue, mais que cette fonction f n'est dérivable en aucun point. Pour ce faire, on cherchera, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers x telle que $\frac{|f(x_n) - f(x)|}{|x_n - x|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Remarque. C'est Karl Weierstrass qui a le premier remarqué l'existence de telles fonctions à la fin du XIXème siècle.

Moralité. La somme d'une série normalement convergente de fonctions dérivables n'est pas du tout dérivable en général. Pour qu'elle le soit, il faut que la série des dérivées converge.