

FEUILLE D'EXERCICES SUR LES SÉRIES DE FONCTIONS.

1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout $[\alpha, \beta]$.

2) Y-a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

2. Convergence simple, absolue, uniforme et normale de $\sum u_n$ où $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n + x^2}$

3. 1) Déterminer les domaines de convergence et d'absolue convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

2) On pose $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

Montrer que $S(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) T(x)$ (et préciser sur quel domaine).

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)T(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} T(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} S(x)$.

4. On pose, pour $z \in \mathbb{C}$, $u_n(z) = \frac{z^n}{1 - z^n}$ et $S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z)$.

1) Étudier le domaine de définition de S et déterminer le domaine Δ de $\mathbb{C}$ où il y a convergence uniforme.

2) Soit $\sum_{n \geq 1} a_n$ une série complexe convergente.

Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n(z)$ est convergente.

5. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2 |x| & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

1) Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2) ϕ étant donnée dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit I_n pour tout entier n par $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f_n(x) dx$.

Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

6. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1 - x^{2n+1}}$. Étudier l'existence et la continuité de f , puis donner un équivalent en 1^- .

7. Soit $S(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x}{n^{x+1}}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Sur quel domaine S est-elle définie? Étudier la continuité de S .

8. (***) Soit $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], u_n(x) = \cos x \sin^n x f(x)$.

1) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(x) dx$.

2) La série $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$? La somme est-elle continue?

9. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $\sum a_n$ converge, et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$.

Montrer que $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$ est uniformément convergente sur Δ_α où $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{C}^* / |\operatorname{Arg} z| \leq \alpha\}$

10. Soit f la fonction de la variable réelle x telle que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

a) Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{E}$ de f .

b) Montrer que cette fonction est strictement décroissante.

c) Déterminer la limite f de x tendant vers $+\infty$.

d) Prouver $f(x) \sim \frac{2}{x^2}$ pour x tendant vers 0. (on peut comparer f à une intégrale.)

e) Soit $J = \int_1^{+\infty} f(x) dx$. Démontrer que J existe et que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

(e3a 1999)