(PSI*)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE - ENS - ESPCI

CONCOURS D'ADMISSION 2016 **FILIÈRES MP ET PC**

ÉPREUVE D'INFORMATIQUE

(Durée : 2 heures)

L'utilisation des calculatrices **n'est pas autorisée** pour cette épreuve.
Le langage de programmation sera **obligatoirement Python**.

⋆ ⋆ ⋆

Ce sujet est découpé en deux parties *totalement indépendantes* toutes deux portant sur l'étude de réseaux sociaux : la première porte sur de la programmation en `Python`; la seconde porte sur l'interrogation de base de données à l'aide de requêtes en `SQL`.

A- Programmation en Python

Notations. On désignera par $[\![n]\!]$ l'ensemble des entiers de 0 à $n-1$: $[\![n]\!] = \{0, ..., n-1\}$.

Objectif. Le but de cette partie est de regrouper des personnes par affinité dans un réseau social. Pour cela, on cherche à répartir les personnes en deux groupes de sorte à minimiser le nombre de liens d'amitié entre les deux groupes. Une telle partition s'appelle une *coupe minimale* du réseau.

Complexité. La complexité, ou le temps d'exécution, d'un programme P (fonction ou procédure) est le nombre d'opérations élémentaires (addition, multiplication, affectation, test, etc...) nécessaires à l'exécution de P. Lorsque cette complexité dépend de plusieurs paramètres n et m, on dira que P a une complexité en $O(\Phi(n,m))$, lorsqu'il existe trois constantes A, n_0 et m_0 telles que la complexité de P soit inférieure ou égale à $A \times \Phi(n,m)$, pour tout $n \geqslant n_0$ et $m \geqslant m_0$.

Lorsqu'il est demandé de donner une certaine complexité, le candidat devra justifier cette dernière si elle ne se déduit pas directement de la lecture du code.

Implémentation. Dans ce sujet, nous adopterons la syntaxe du langage `Python`.

On rappelle qu'en `Python`, on dispose des opérations suivantes, qui ont toutes une complexité constante (car en `Python`, les listes sont en fait des tableaux de taille dynamique) :

- `[]` crée une liste vide (c.-à-d. ne contenant aucun élément)
- `[x]*n` qui crée une liste (ou un tableau) à n éléments contenant tous la valeur contenue dans x. Par exemple, `[1]*3` renvoie le tableau (ou la liste) `[1,1,1]` à 3 cases contenant toutes la même valeur 1.
- `len(liste)` renvoie la longueur de la liste `liste`
- `liste[i]` désigne le (`i` + 1)-ème élément de la liste `liste` s'il existe et produit une erreur sinon (noter que le premier élément de la liste est `liste[0]`).
- `liste.append(x)` ajoute le contenu de x à la fin de la liste `liste` qui s'allonge ainsi d'un élément. Par exemple, après l'exécution de la suite d'instructions "`liste = []; liste.append(2); liste.append([1,3]);`", la variable `liste` a pour valeur la `liste [2,[1,3]]`. Si ensuite on fait l'instruction `liste[1].append([7,5]);`, la variable `liste` a pour valeur la liste `[2, [1, 3, [7,5]]]`.

- `liste.pop()` renvoie la valeur du dernier élément de la liste liste et l'élimine de la liste. Ainsi, après l'exécution de la suite d'instructions " `listeA = [1,[2,3]]; listeB = listeA.pop(); c = listeB.pop();`", les trois variables `listeA`, `listeB` et `c` ont pour valeurs respectives `[1]`, `[2]` et 3.
- `random.randint(a,b)` renvoie un entier tiré (pseudo)aléatoirement et uniformément dans l'ensemble $\{a, a+1, ..., b-1, b\}$.
- `True` et `False` sont les deux valeurs booléennes Vrai et Faux.

Important : L'usage de toute autre fonction sur les listes telle que `liste.insert(i,x)`, `liste.remove(x)`, `liste.index (x)`, ou encore `liste.sort(x)` est rigoureusement interdit (ces fonctions devront être programmées explicitement si nécessaire).

Dans la suite, nous distinguerons *fonction* et *procédure* : les fonctions renvoient une valeur (un entier, une liste,...) tandis que les procédures ne renvoient aucune valeur.

Nous attacherons la plus grande importance à la lisibilité du code produit par les candidats; aussi, nous encourageons les candidats à introduire des procédures ou fonctions intermédiaires lorsque cela simplifie l'écriture.

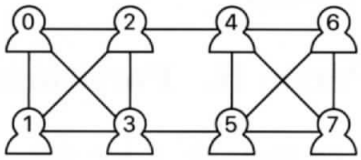
Partie I. Réseaux sociaux

Structure de données. Nous supposerons que les individus sont numérotés de 0 à $n-1$ où n est le nombre total d'individus. Nous représenterons chaque lien d'amitié entre deux individus `i` et `j` par une liste contenant leurs deux numéros dans un ordre quelconque, c.-à-d. par la liste `[i,j]` ou par la liste `[j,i]` indifféremment.

Un réseau social R entre n individus sera représenté par une liste `reseau` à deux éléments où :

- `reseau [0]`$= n$ contient le nombre d'individus appartenant au réseau
- `reseau[1]` = la liste *non-ordonnée* (et potentiellement vide) des liens d'amitié déclarés entre les individus

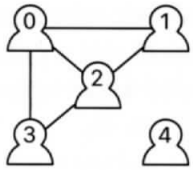
La figure 1 donne l'exemple d'un réseau social et d'une représentation possible sous la forme de liste. Chaque lien d'amitié entre deux personnes est représenté par un trait entre elles.



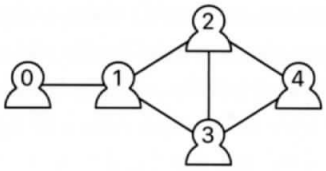

```
reseau = [ 8,
           [ [0,1], [1,3], [3,2], [2,0], [0,3], [2,1], [4,5],
             [5,7], [7,6], [6,4], [7,4], [6,5], [2,4], [5,3] ]
         ]
```

Figure 1: Un réseau à 8 individus ayant 14 liens d'amitié déclarés et une de ses représentations possibles en mémoire sous forme d'une liste [Nombre d'individus, liste des liens d'amitié].

Question 1. Donner une représentation sous forme de listes pour chacun des deux réseaux sociaux ci-dessous :



Réseau A



Réseau B

Question 2. Écrire une fonction `creerReseauVide(n)` qui crée, initialise et renvoie la représentation sous forme de liste du réseau à n individus n'ayant aucun lien d'amitié déclaré entre eux.

Question 3. Écrire une fonction `estUnLienEntre(paire,i,j)` où paire est une liste à deux éléments et `i` et `j` sont deux entiers, et qui renvoie `True` si les deux éléments contenus dans `paire` sont `i` et `j` dans un ordre quelconque; et renvoie `False` sinon.

Question 4. Écrire une fonction `sontAmis(reseau,i, j)` qui renvoie `True` s'il existe un lien d'amitié entre les individus `i` et `j` dans le réseau `reseau`; et renvoie `False` sinon.

Quelle est la complexité en temps de votre fonction dans le pire cas en fonction du nombre m de liens d'amitié déclarés dans le réseau?

Question 5. Écrire une procédure `declareAmis(reseau,i, j)` qui modifie le réseau `reseau` pour y ajouter le lien d'amitié entre les individus `i` et `j` *si ce lien n'y figure pas déjà.*

Quelle est la complexité en temps de votre procédure dans le pire cas en fonction du nombre m de liens d'amitié déclarés dans le réseau?

Question 6. Écrire une fonction `listeDesAmisDe(reseau,i)` qui renvoie la liste des amis de `i` dans le réseau `reseau`.

Quelle est la complexité en temps de votre fonction dans le pire cas en fonction du nombre m de liens d'amitié déclarés dans le réseau?

Partie II. Partitions

Une *partition* en k groupes d'un ensemble A à n éléments consiste en k sous-ensembles **disjoints non-vides** $A_1, \ldots, A_k$ de A dont l'union est A, c.-à.-d. tels que $A_1 \cup \cdots \cup A_k = A$ et pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Par exemple $A_1 = \{1, 3\}$, $A_2 = \{0, 4, 5\}$, $A_3 = \{2\}$ est une partition en trois groupes de $A = [\![6]\!]$. Dans cette partie, nous implémentons une structure de données très efficace pour coder des partitions de $[\![n]\!]$.

Le principe de cette structure de données est que les éléments de chaque groupe sont structurés par une relation filiale : chaque élément a un (unique) parent choisi dans le groupe et l'unique élément du groupe qui est son propre parent est appelé le *représentant* du groupe. On s'assure par construction que chaque élément `i` du groupe a bien pour ancêtre le représentant du groupe, c.-à-d. que le représentant du groupe est bien le parent du parent du parent etc. (autant de fois que nécessaire) du parent de l'élément `i`. La relation filiale est symbolisée par une flèche allant de l'enfant au parent dans la figure 2 qui présente un exemple de cette structure de données. Dans l'exemple de cette figure, 14 a pour parent 11 qui a pour parent 1 qui a pour parent 9 qui est son propre parent. Ainsi, 9 est le représentant du groupe auquel appartiennent 14, 11, 1 et 9. Notons que ce groupe contient également 8, 13 et 15.

À noter que la représentation n'est pas unique (si l'on choisit un autre représentant pour un groupe et une autre relation filiale, on aura une autre représentation du groupe).

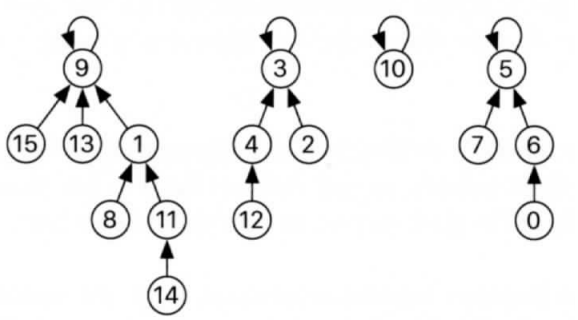
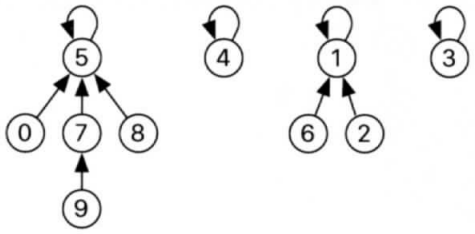


Figure 2: Une représentation filiale de la partition suivante de $[\![16]\!]$ en quatre groupes : $\{1, 8, 9, 11, 13, 14, 15\}$, $\{2, 3, 4, 12\}$, $\{10\}$ et $\{0, 5, 6, 7\}$ dont les représentants respectifs sont 9, 3, 10 et 5.

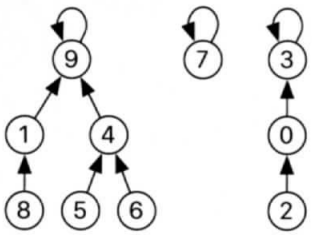
Pour coder cette structure, on utilise un tableau `parent` à n éléments où la case `parent[i]` contient le numéro du parent de `i`. Par exemple, les valeurs du tableau `parent` encodant la représentation filiale donnée dans la figure 2 sont :

i :	0	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	14	15
`parent`$[i]$:	6	9	3	3	3	5	5	5	9	10	1	4	9	11	9

Question 7. Donner les valeurs du tableau `parent` encodant les représentations filiales des deux partitions de $[\![10]\!]$ ci-dessous, et préciser les représentants de chaque groupe :



Représentation filiale A



Représentation filiale B

Initialement, chaque élément de $[\![n]\!]$ est son propre représentant et la partition initiale consiste en n groupes contenant chacun un individu. Ainsi, initialement, `pere`$[i] = i$ pour tout $i \in [\![n]\!]$.

Question 8. Écrire une fonction `creerPartitionEnSingletons(n)` qui crée et renvoie un tableau `parent` à `n` éléments dont les valeurs sont initialisées de sorte à encoder la partition de $[\![n]\!]$ en n groupes d'un seul élément.

Nous sommes intéressés par deux opérations sur les partitions :

- Déterminer si deux éléments appartiennent au même groupe dans la partition.
- Fusionner deux groupes pour n'en faire plus qu'un. Par exemple, la fusion des groupes $A_1 = \{1, 3\}$ et $A_3 = \{2\}$ dans la partition de $[\![6]\!]$ donnée en exemple au tout début de cette partie donnera la partition en deux groupes $A_2 = \{0, 4, 5\}$ et A_4 où $A_4 = A_1 \cup A_3 = \{1, 2, 3\}$.

Question 9. Écrire une fonction `representant(parent,i)` qui utilise le tableau `parent` pour trouver et renvoyer l'indice du représentant du groupe auquel appartient `i` dans la partition encodée par le tableau `parent`.

Quelle est la complexité dans le pire cas de votre fonction en fonction du nombre total n d'éléments? Donnez un exemple de tableau `parent` à n éléments qui atteigne cette complexité dans le pire cas.

Pour réaliser la fusion de deux groupes désignés par l'un de leurs éléments `i` et `j` respectivement, on applique l'algorithme suivant :

1. Calculer les représentants `p` et `q` des deux groupes contenant `i` et `j` respectivement.
2. Faire `parent`[p] = `q`.

La figure 3 présente la structure filiale obtenue après la fusion des groupes contenant respectivement 6 et 14 de la figure 2.

Question 10. Écrire une procédure `fusion(parent,i,j)` qui modifie le tableau `parent` pour fusionner les deux groupes contenant `i` et `j` respectivement.

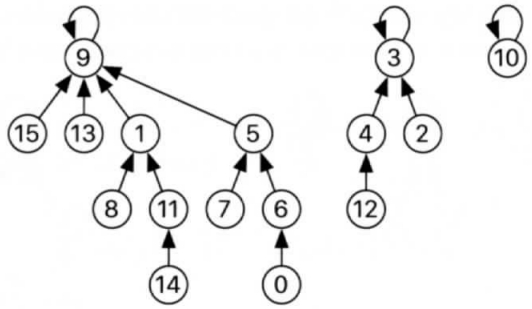


Figure 3: Représentation filiale obtenue après la fusion des groupes contenant respectivement 6 et 14 de la figure 2.

Pour l'instant, la structure de données n'est pas très efficace comme le montre la question suivante.

Question 11. Proposer une suite de $(n-1)$ fusions dont l'exécution à partir de la partition en n singletons de $[\![n]\!]$, nécessite de l'ordre de n^2 opérations élémentaires.

Pour remédier à cette mauvaise performance, une astuce consiste à compresser la relation filiale après chaque appel à la fonction `representant(parent,i)`. L'opération de compression consiste à faire la chose suivante : si `p` est le résultat de l'appel à la fonction `representant(parent,i)`, modifier le tableau `parent` de façon à ce que chaque ancêtre (c.-à-d. parent de parent . .. de parent) de `i`, `i` y compris, ait pour parent direct `p`. Noter bien que même si un appel à `representant(parent,i)` renvoie le représentant de `i` elle modifie également le tableau `parent`. Si l'on reprend l'exemple de la figure 2, le résultat de l'appel `representant(parent,14)` est 9, que l'on a calculé en remontant les ancêtres successifs de 14 : 11, 1 puis 9. L'opération de compression consiste alors à donner la valeur 9 aux cases d'indices 14, 11, et 1 du tableau `parent`. La structure filiale obtenue après l'opération de compression menée depuis 14 est illustrée dans la figure 4.

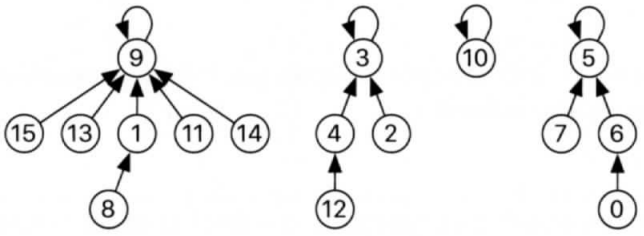


Figure 4: Résultat de la compression depuis 14 dans la représentation filiale de la figure 2.

Question 12. Modifier votre fonction `representant(parent,i)` pour qu'elle modifie le tableau `parent` pour faire pointer directement tous les ancêtres de `i` vers le représentant de `i` une fois qu'il a été trouvé.

En quoi cette optimisation de la structure filiale peut-elle être considérée comme "gratuite" du point de vue de la complexité ?

Afin d'afficher de manière lisible la partition codée par un tableau `parent`, on souhaite calculer à partir du tableau `parent` la liste des listes des éléments des différents groupes. Une sortie possible pour le tableau `parent` correspondant à la figure 2 serait :

```
[ [ 15, 8, 1, 9, 11, 13, 14],
  [ 4, 3, 2, 12],
  [ 7, 5, 6, 0],
  [ 10 ] ]
```

Question 13. Écrire une fonction `listeDesGroupes(parent)` qui renvoie la liste des différents groupes codés par le tableau `parent` sous la forme d'une liste des listes des éléments des différents groupes.

Partie III. Algorithme randomisé pour la coupe minimum

Revenons à présent à notre objectif principal : Trouver une partition des individus d'un réseau social en deux groupes qui minimise le nombre de liens d'amitiés entre les deux groupes.

Pour résoudre ce problème nous allons utiliser l'algorithme randomisé suivant :
Entrée : un réseau social à n individus

1. Créer une partition P en n singletons de $[\![n]\!]$
2. Initialement aucun lien d'amitié n'est marqué
3. Tant que la partition P contient au moins trois groupes et qu'il reste des liens d'amitié non-marqués dans le réseau faire :
   (a) Choisir un lien uniformément au hasard parmi les liens non-marqués du réseau, notons-le $[\mathtt{i}, \mathtt{j}]$.
   (b) Si `i` et `j` n'appartiennent pas au même groupe dans la partition P, fusionner les deux groupes correspondants
   (c) Marquer le lien $[\mathtt{i}, \mathtt{j}]$.
4. Si P contient $k \geqslant 3$ groupes, faire $k - 1$ fusions pour obtenir deux groupes.
5. Renvoyer la partition P.

La figure 5 présente une exécution possible de cet algorithme randomisé sur le réseau de la figure 1.

Question 14. Écrire une fonction `coupeMinimumRandomisee(reseau)` qui renvoie le tableau `parent` correspondant à la partition calculée par l'algorithme ci-dessus.

Indication. Au lieu de marquer explicitement les liens déjà vus, on pourra avantageusement les positionner à la fin de la liste *non-ordonnée* des liens du réseau et ainsi pouvoir tirer simplement les liens au hasard parmi ceux placés au début de la liste.

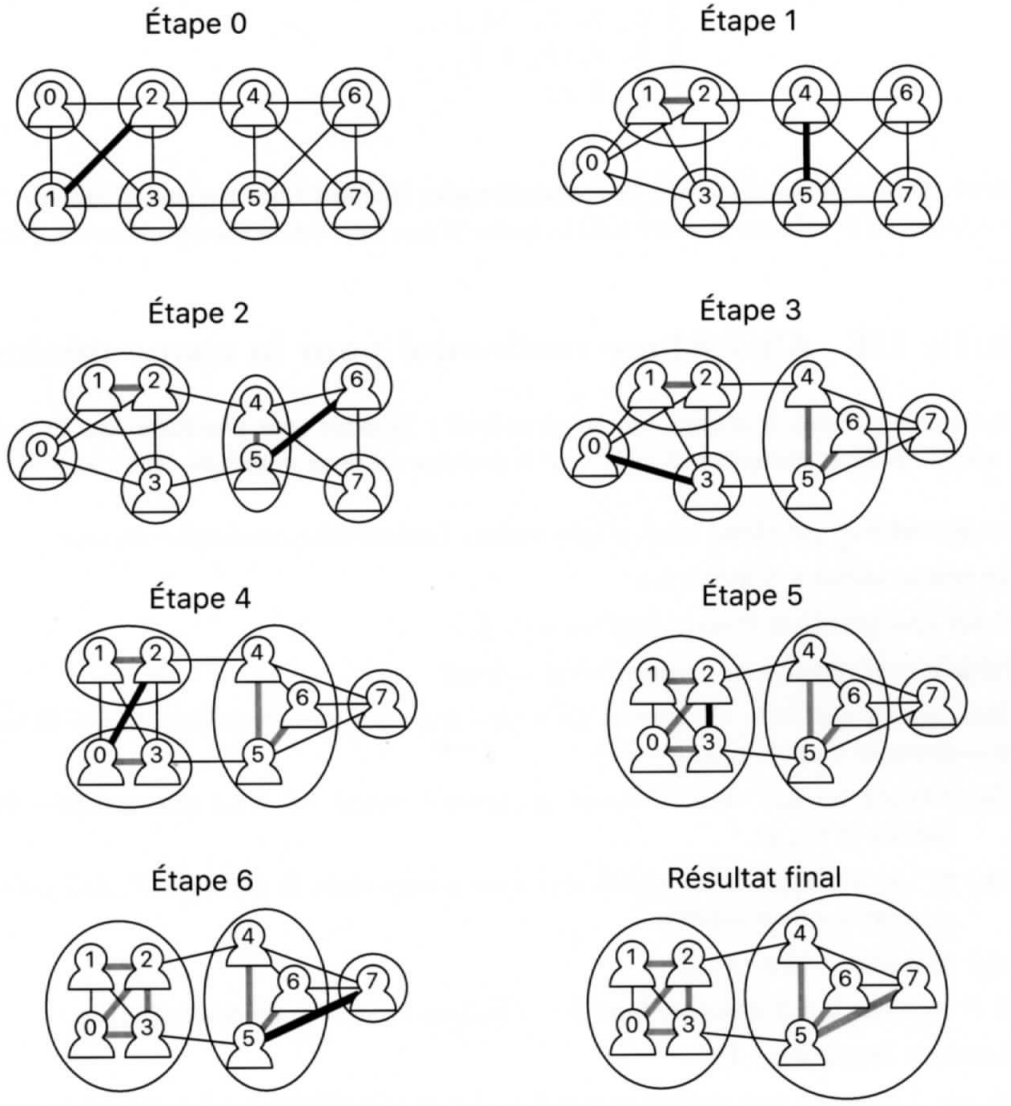


Figure 5: Une exécution de l'algorithme randomisé sur le réseau de la figure 1 où les liens sélectionnés aléatoirement sont dans l'ordre : $[2,1],[4,5],[6,5],[0,3],[2,0],[3,2]$ et $[5,7]$. Les liens représentés en noir épais sont les liens sélectionnés au hasard à l'étape courante: les liens épais et grises sont les liens marqués par l'algorithme; les ronds représentent la partition à l'étape courante.

Quelle est la complexité de votre procédure en fonction de n, m et $\alpha(n)$, où m est le nombre de liens d'amitié déclarés dans le réseau et où $\alpha(n)$ désigne la complexité d'un appel à la fonction `representant`?

Question 15. Écrire une fonction `taillecoupe(reseau, parent)` qui calcule le nombre de liens entre les différents groupes de la partition représentée par `parent` dans le réseau `reseau`.

On peut démontrer que cet algorithme renvoie une coupe de taille minimum avec une probabilité supérieure à $1/n$, ce qui fait que la meilleure parmi n exécutions indépendantes de cet algorithme est effectivement minimum avec probabilité supérieure à $1/e \approx 0.36787....$

La structure de données filiale avec compression pour les partitions est particulièrement efficace aussi bien en pratique qu'en théorie. En effet, la complexité de k opérations est de $O(k\alpha(k))$ opérations élémentaires où $\alpha(k)$ est l'inverse de la fonction d'Ackermann, une fonction qui croit *extrêmement* lentement vers l'infini (par exemple $\alpha(10^{80}) = 5$).

B- Programmation SQL

Une représentation simplifiée, réduite à deux tables, de la base de données d'un réseau social est donnée dans la figure 6.

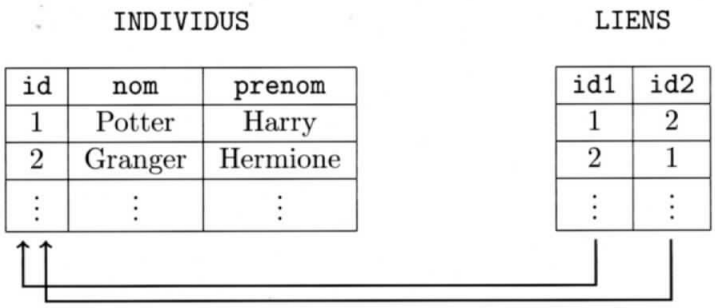


Figure 6: Schéma de la base de données du réseau social

La table `INDIVIDUS` répertorie les individus et contient les colonnes

- `id` (clé primaire), un entier identifiant chaque individu;
- `nom`, une chaîne de caractères donnant le nom de famille de l'individu:
- `prenom`, une chaîne de caractères donnant le prénom de l'individu.

La table `LIENS` répertorie les liens d'amitiés entre individus et contient les colonnes

- `id1`, entier identifiant le premier individu du lien d'amitié;
- `id2`, entier identifiant le second individu du lien d'amitié.

On supposera par ailleurs que pour tout couple `(x,y)` dans la table `LIENS`, le couple `(y,x)` est également présent dans la table (contrairement à la partie précédente de cet énoncé).

Question 16. Écrire une requête `SQL` qui renvoie les identifiants des amis de l'individu d'identifiant `x`.

Question 17. Écrire une requête `SQL` qui renvoie les (noms,prénoms) des amis de l'individu d'identifiant `x`.

Question 18. Écrire une requête `SQL` qui renvoie les identifiants des individus qui sont amis avec au moins un ami de l'individu d'identifiant `x`.