

COLLE D'INFORMATIQUE N°2.

(Durée : 2 heures)

L'utilisation des calculatrices **n'est pas autorisée** pour cette épreuve. Le langage de programmation choisi par le candidat doit être spécifié en tête de la copie. On attachera une grande importance à la clarté, à la précision, à la concision de la rédaction.

On cherche à calculer le gain maximum possible à la Bourse sur une action pendant une période de n jours, en ne faisant qu'une opération d'achat et de vente d'une seule action. On suppose que les cours quotidiens de cette action sont enregistrés dans un tableau d'entiers naturels ($a_i \in \mathbb{N}$) de n éléments ($0 \leq i < n$).

On définit l'*amplitude* de la variation du cours comme la valeur absolue du maximum de la variation de ce cours pendant la période observée, c'est-à-dire la quantité suivante :

$$\text{amplitude} = \max_{0 \leq i \leq j < n} |a_j - a_i| = \max_{0 \leq i < n} a_i - \min_{0 \leq i < n} a_i$$

Le temps d'exécution $T(f)$ d'une fonction f de la variable a est le nombre d'opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division, affectation) nécessaire au calcul de $f(a)$. Lorsque ce temps d'exécution dépend d'un paramètre n , il sera noté $T_n(f)$. On dit que la fonction f s'exécute :

- en temps linéaire par rapport au paramètre n , s'il existe $K > 0$ tel que pour tout n , $T_n(f) \leq Kn$;
- en temps quadratique par rapport au paramètre n , s'il existe $K > 0$ tel que pour tout n , $T_n(f) \leq Kn^2$.

Question 1 Écrire une fonction `amplitude(a)` qui retourne comme résultat l'amplitude de la variation du cours représenté par le tableau a . Donner un ordre de grandeur du temps d'exécution de cette fonction en fonction de n .

Le *gain maximum* est le gain maximum possible sur la période observée, c'est-à-dire la quantité suivante :

$$\text{gain} = \max_{0 \leq i \leq j < n} (a_j - a_i)$$

Question 2 Donner un exemple où l'amplitude est différente du gain maximum. Que représente l'amplitude en terme de gain ou de perte ?

Question 3 En suivant textuellement la définition du gain, écrire une fonction `gain(a)` qui retourne, en temps quadratique (par rapport à n), le gain maximal possible sur le cours représenté par le tableau a .

Question 4 Modifier la fonction précédente pour aussi imprimer les deux dates i et j d'achat et de vente de l'action permettant d'obtenir le gain maximum sur le tableau a (avec $j - i$ minimum).

Pour tout i ($0 \leq i < n$) définissons le gain courant maximum gainCourant_i comme le gain maximum possible obtenu en vendant son action au temps i , c'est-à-dire :

$$\text{gainCourant}_i = \max_{0 \leq k \leq i} (a_i - a_k)$$

Question 5 En calculant progressivement le gain courant maximum, écrire une fonction `gain1(a)` qui retourne, en temps linéaire (par rapport à n), le gain maximum possible sur le cours représenté par le tableau a .

Question 6 Modifier la fonction précédente pour aussi imprimer les deux dates i et j d'achat et de vente de l'action permettant d'obtenir le gain maximum sur le tableau a (avec $j - i$ minimum).

On considère maintenant la possibilité de faire séquentiellement deux transactions pendant la période observée, c'est-à-dire de considérer deux dates d'achat i et i' , et deux dates de vente j et j' telles que $0 \leq i \leq j \leq i' \leq j' < n$.

Question 7 Écrire la fonction `gain2(a)` qui retourne, en temps quadratique (par rapport à n), le gain maximum possible en faisant deux transactions sur le cours de l'action représenté par le tableau a .

Question 8 Modifier la fonction précédente pour aussi imprimer les quatre dates i , j et i' , j' d'achats et de ventes de l'action permettant d'obtenir le gain maximum sur le tableau a (avec $j - i$ et $j' - i'$ minimum).