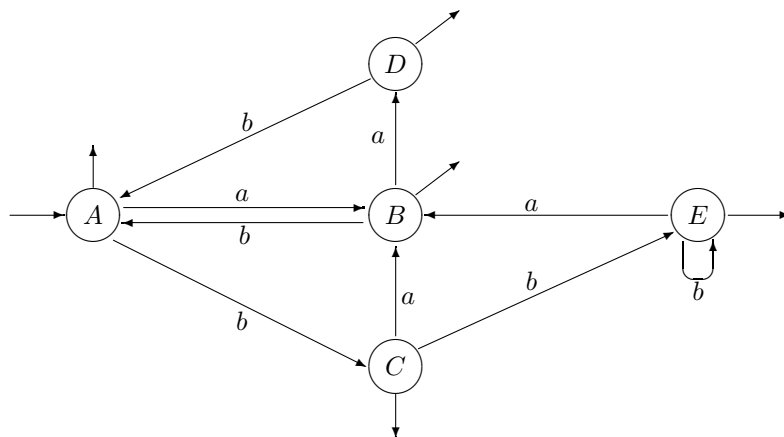


## Corrigé TD n°1

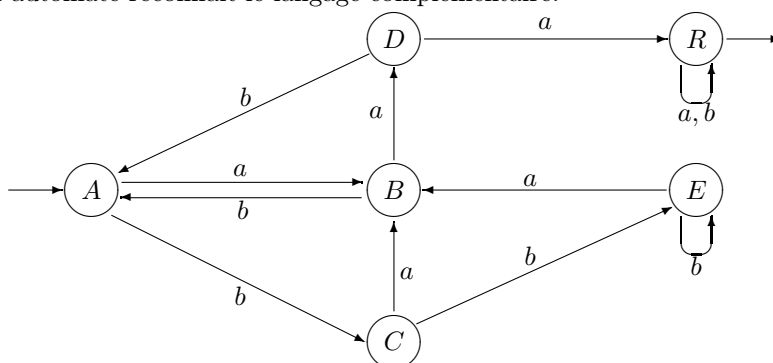
## 1 Exercice sur les automates

## 1. Détermination

|                   | a          | b             |
|-------------------|------------|---------------|
| $A = \{p, r\}$    | $\{q, r\}$ | $\{p, q\}$    |
| $B = \{q, r\}$    | $\{q\}$    | $\{p, r\}$    |
| $C = \{p, q\}$    | $\{q, r\}$ | $\{p, q, r\}$ |
| $D = \{q\}$       |            | $\{p, r\}$    |
| $E = \{p, q, r\}$ | $\{q, r\}$ | $\{p, q, r\}$ |



2. Complétons l'automate déterministe précédent en ajoutant un état rebut  $R$  et considérons l'automate "complémentaire" qui s'en déduit en rendant terminal l'état  $R$  et non terminal les autres états. On sait que ce nouvel automate reconnaît le langage complémentaire.



On constate que lorsqu'on arrive en l'état final  $R$  pour la première fois si et seulement si on vient de lire un mot se terminant par  $aaa$ . Ainsi le langage complémentaire de  $L(\mathcal{A})$  est égal à l'ensemble des mots contenant  $aaa$ , d'où la conclusion pour  $L(\mathcal{A})$ .

3. Posons  $E = b^*(aa^*bb^*)^*a^*$  et montrons que  $A^* = L(E)$ , c'est à dire en fait  $A^* \subset L(E)$ .

Montrons par récurrence sur la longueur  $n$  d'un mot  $m \in A^*$  qu'il est dans  $L(E)$ .

. C'est immédiat si  $n = 0$  et  $n = 1$ .

. Supposons que tous les mots de longueur  $n - 1$  sont dans  $L(E)$ .

Soit  $u$  un mot de longueur  $n$ .

\* S'il se termine par  $a$ , alors il s'écrit  $u = v.a$  avec  $v$  de longueur  $n - 1$ .

D'après l'hypothèse de récurrence,  $v \in L(b^*(aa^*bb^*)^*a^*)$ , donc  $u = v.a$  aussi.

\* S'il se termine par  $b$ , alors il s'écrit  $u = v.b$  avec  $v$  de longueur  $n - 1$ .

Si  $v$  se termine par  $a$ , alors  $v \in L(b^*(aa^*bb^*)^*aa^*)$ , donc  $u \in L(b^*(aa^*bb^*)^*aa^*b) \subset L(b^*(aa^*bb^*)^*aa^*bb^*) \subset L(E)$ .

Si  $v$  se termine par  $b$ , alors  $v \in L(b^*(aa^*bb^*)^*aa^*bb^*)$ , donc  $u \in L(b^*(aa^*bb^*)^*aa^*bb^*b) \subset L(E)$ .

4. Les mots ne contenant pas  $aaa$  sont tels que  $aa^*$  ne peut prendre que les valeurs  $\varepsilon$ ,  $a$  et  $aa$ .

Une expression rationnelle du langage  $L(\mathcal{A})$  est donc :  $b^*((a + aa)bb^*)^*(\varepsilon + a + aa)$ .