TD n°3

II.A - Définitions et notations employées

- Soit A un alphabet, on note A^* l'ensemble des mots sur A.
- Soit u un mot de A^*, $|u|$ est la longueur du mot u.
- On note ε le mot vide (de longueur nulle).
- Le symbole de la concaténation est . (le point).
- Un mot u est un sous-mot de v quand il existe deux mots x et y , éventuellement vides tels que $v = x.u.y$.
- Un mot u est préfixe de v quand il existe un mot w tel que $v = u.w$.
- Un mot u est suffixe de v quand il existe un mot w tel que $v = w.u$.

Pour un automate fini déterministe $\mathcal{A} = (E, e_0, F, A, \delta)$:

- E est l'ensemble (fini) des états,
- e_0 est un élément distingué de E appelé état initial,
- F est un sous ensemble de E appelé ensemble des états finals,
- A est l'alphabet d'entrée,
- δ est une fonction de $E \times A$ dans E, appelée fonction de transition,
- δ^* est la fonction de $E \times A^*$ dans E définie à partir de δ par :
  - $\delta^*(e, \varepsilon) = e$
  - si $\delta^*(e, u)$ est défini, avec $\delta^*(e, u) = e_1$ et si $\delta(e_1, a)$ est défini avec $\delta(e_1, a) = e_2$, alors $\delta^*(e, u.a)$ est défini et $\delta^*(e.u, a) = \delta(\delta^*(e, u), a) = e_2$
- un mot u est reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ quand $\delta^*(e.u)$ est défini, et $\delta^*(e, u) \in F$,
- le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ est l'ensemble des mots reconnus par $\mathcal{A}$.

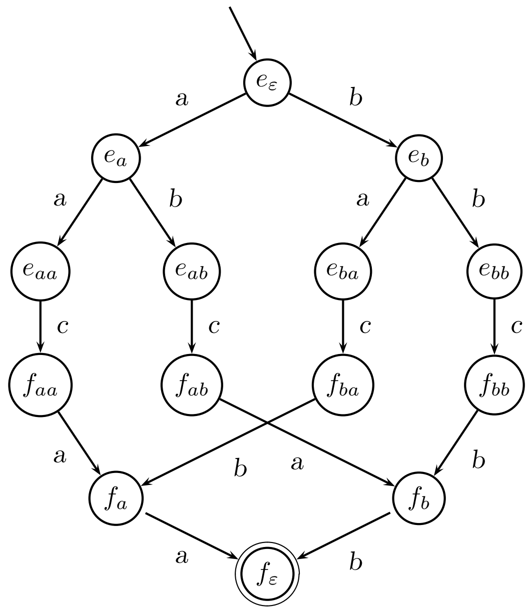
Pour un automate fini non déterministe $\mathcal{A} = (E, e_0, F.A, \delta)$.

- E est l'ensemble (fini) des états,
- e_0 est un élément distingué de E appelé état initial,
- F est un sous-ensemble de E appelé ensemble des états finals,
- A est l'alphabet d'entrée,
- δ est une application de $E \times A$ dans $P(E)^*$, appelée fonction de transition,

- soit $u = u_1u_2 \dots u_n$, un mot de A^*, une suite d'états $s = s_0s_1u_s \dots s_n$, est compatible pour u quand : $s_0 = e_0$, et $s_i \in \delta(s_{i-1}, u_1)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, une suite compatible est acceptante quand elle se termine par un état final,
- un mot u est accepté par $\mathcal{A}$ quand il existe une suite acceptante pour u,
- un état e est accessible par u quand il existe une suite d'états compatibles pour u se terminant par e,
- un état e est accessible quand il existe un mot u tel que e est accessible par u,
- un mot $u = u_1u_2 \dots u_n$ fait passer de e à e' quand il existe une suite d'états $s = s_0s_1 \dots s_n$, $s_0 = e$, $s_n = e'$, et $s_i \in \delta(s_{i-1}, u_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

II.B- Soit l'alphabet $A = \{a, b, c\}$. Montrer que l'automate déterministe, donné par le graphe ci-contre, reconnaît le

$$L_2 = \{u.c.u \mid u \in \{a,b\}^*, |u| = 2\}.$$



Dans les deux questions suivantes, on veillera à démontrer la validité des constructions proposées.

II.C - Généralisation : soit $n \geqslant 1$ un entier, construire un automate déterministe qui reconnaît le langage :

$$L_n = \{u.c.u \mid u \in \{a,b\}^*, |u| = n\}.$$

Quel est, en fonction de n, le nombre d'états de cet automate?

II.D - Construire un automate non déterministe qui reconnaît le langage suivant :

$$L'_n = \{v.c.w \mid \exists v_1, v_2, w_1, w_2, u \in \{a,b\}^*,\ |u| = n,\ v = v_1.u.v_2,\ w = w_1.u.w_2\}.$$

Donner le nombre d'états de cet automate en fonction de n.

II.E - Donner le graphe d'un automate reconnaissant L'_2 (cas où $n = 2$).

II.F - Soit $\mathcal{A}$ un automate fini non déterministe reconnaissant L'_n, δ la fonction de transition de $\mathcal{A}$, e_0 l'état initial de $\mathcal{A}$. Montrer que dans toute suite compatible acceptante pour un mot de longueur $2n + 1$ tous les états sont distincts.

II.G - Montrer que $\mathrm{Card}(\{e \mid \exists u \in \{a,b\}^*, e \text{ accessible par } u\}) \geqslant 2^{n+1} - 1$.

II.H - Montrer que tout automate déterministe ou non déterministe qui reconnaît L'_n a au moins $2^{n+2} - 2$ états.

II.I - Donner une expression rationnelle associée à L'_2.

II.J - Donner une expression rationnelle associée à $A^* - L'_1$.