Feuille d'exercices n°12 de l'option d'informatique.

Voici une liste non exhaustive de fonctions Maple à utiliser : **allvalues, arcsin, coeffs, convert, diff, display, dsolve, eigenvects, evalf, evalm, exp, floor, fsolve, limit, Im, int, jordan, leadterm, map, matrix, plot, pointplot, polynom, print, Re, restart, seq, series, set, simplify, solve, sqrt, subs, sum, transpose, unapply, union, &***...

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, exprimer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Trouver les valeurs propres et les espaces propres de M.
- Montrer qu'il existe α, β et deux matrices A et B tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha^n.A + \beta^n.B = M^n$

3. Soit

$$P = X^4 + aX^3 + \sqrt{3}X^2 + bX$$

Trouver a et b réels afin que $1 + 2i$ soit zéro de P et déterminer les autres.

4. Trouver tous les quadruplets (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^4$ tels que

$$\int \frac{ax^5 + x^4 + bx^3 + cx^2 + x + d}{x\,(x^2 + 1)}\,dx$$

soit une fraction rationnelle.

5.

$$f(x) = \sin(x) - \frac{ax + bx^3 + cx^5}{1 + dx^2 + ex^4}$$

Déterminer a, b, c, d et e pour que f soit un infiniment petit d'ordre le plus grand possible en 0.

6. Soit

$$A_n = t^n + \frac{1}{t^n}$$

Montrer que $A_n = A_1 A_{n-1} - A_{n-2}$ et en déduire que $A_n = P_n(A_1)$ où P_n est un polynôme.
Faire un programme qui calcule P_n.
Calculer et linéariser $P_n(2\cos x)$ pour n variant de 0 à 10. Que peut-on dire ?

7. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Déterminer, suivant les valeurs de a, b et c la dimension de l'espace vectoriel E constitué des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.