

FEUILLE D'EXERCICES N°13 DE L'OPTION D'INFORMATIQUE.

Voici une liste non exhaustive de fonctions Maple à utiliser : **allvalues**, **arcsin**, **coeffs**, **convert**, **diff**, **display**, **dsolve**, **eigenvecs**, **evalf**, **evalm**, **exp**, **floor**, **fsolve**, **limit**, **Im**, **int**, **jordan**, **leadterm**, **map**, **matrix**, **plot**, **pointplot**, **polynom**, **print**, **Re**, **restart**, **seq**, **series**, **set**, **simplify**, **solve**, **sqrt**, **subs**, **sum**, **transpose**, **unapply**, **union**, **&***...

1. Soit le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_4[X]$, puis calculer la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_4[X]$ de la fonction

$$x \mapsto 1 - |2x - 1|$$

Tracer les graphes des fonctions correspondantes.

2. On définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_7[X]$ par :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{10} P\left(\frac{k}{10}\right) Q\left(\frac{k}{10}\right)$$

Projection orthogonale sur $\mathbb{R}_3[X]$ de $12X^7 + 5X^6 + X + 1$? Tracer les graphes des fonctions correspondantes.

3. Minimum de

$$(a, b) \mapsto \int_0^1 (\operatorname{sh}x - ax - b)^2 dx$$

4. Résoudre

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x - K\omega^2y = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2y - K\omega^2x = 0 \\ x(0) = x'(0) = y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

et tracer les graphes pour $K = 0, 5$ et $\omega = 10$.

5. Soit $f : (x, y) \mapsto 2x(1 - x^2 - y^2) - x^4 - y^4$.

- Tracer la fonction en 3D
- Montrer que f admet au moins 3 extrema
- Montrer que ces 3 extrema sont uniques

6. Soient quatre points de l'espace $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

- Montrer que A, B, C et D ne sont pas coplanaires
- Déterminer le centre et le rayon de la sphère passant par les 4 points.
- Donner l'équation du cercle circonscrit à ABC .