Feuille d'exercices n°14 de l'option d'informatique.

Voici une liste non exhaustive de fonctions Maple à utiliser : **allvalues, arcsin, coeffs, convert, diff, display, dsolve, eigenvects, evalf, evalm, exp, floor, fsolve, limit, Im, int, jordan, leadterm, map, matrix, plot, pointplot, polynom, print, Re, restart, seq, series, set, simplify, solve, sqrt, subs, sum, transpose, unapply, union, &***...

1. Soit la série de terme général $a_n = 2^{\sqrt{n}} x^n$ et $S(x)$ sa somme. Déterminer son rayon de convergence. Donner une valeur de N pour que la somme partielle $S_N(x)$ d'indice N soit une valeur approchée de $S(x)$ à 10^{-8} près pour tout x de $[-1/3, 1/3]$.
Tracer la graphe de S_N pour x dans $[-1/3, 1/3]$.

2. Sachant que

$$\pi = 6\text{Arcsin}\frac{1}{2}$$

utiliser un DSE de la fonction Arcsin permettant d'obtenir un nombre donné de décimales exactes de π.

3. Étude, nature et paramètres de la courbe d'équation polaire

$$\rho = \frac{\sin\theta}{\cos 2\theta}$$

4. Soit f la fonction paire 2-périodique coïncidant avec la fonction $x \longmapsto x^7$ sur $[0, 1]$. Calculer les coefficients de Fourier de f, écrire la $5^{\grave{e}me}$ somme partielle, tracer f et la $30^{\grave{e}me}$ somme partielle.

5. On considère l'équation différentielle non autonome $x' = \arcsin(t.x)$. Montrer que les courbes intégrales sont dans le domaine du plan $\{(t, x)/\, |t.x| \leqslant 1\}$. Tracer les courbes intégrales pour les solutions qui prennent les valeurs : -3, -2.5, -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3 ainsi que les courbes d'équations $x.t = 1$ et $x.t = -1$.

6. Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormal, on donne les points $A(1, 0)$, $B(2, 0)$ et $C(0, 3)$. Trouver les droites $\mathcal{D}$ du plan telles que : $d(A, \mathcal{D})^2 + d(B, \mathcal{D})^2 + d(C, \mathcal{D})^2$ soit minimale. Afficher sur un même dessin, les points A, B, C et D ainsi que les droites trouvées.

7. Soit f la fonction paire 2-périodique coïncidant avec la fonction $x \longmapsto x^7$ sur $[0, 1]$. Calculer les coefficients de Fourier de f, écrire la $5^{\grave{e}me}$ somme partielle, tracer f et la $30^{\grave{e}me}$ somme partielle.

8. Soit

$$f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Calculer Δf. Déterminer toutes les fonctions F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\Delta f = 0$ puis la fonction F telle que

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ F(0) = 0 \text{ et } F(1) = 1 \end{cases}$$

9. Soit l'équation différentielle

$$x(x^2 + 1)y' - (x^2 - 1)y = -2x$$

Donner les solutions ; existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?
Montrer qu'il existe un point A tel que toutes les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse 2 soient concourantes en ce point.

10. Sachant que

$$\pi = 6\text{Arcsin}\frac{1}{2}$$

utiliser un DSE de la fonction Arcsin permettant d'obtenir un nombre donné de décimales exactes de π.

11. Résoudre approximativement, par la méthode d'Euler, l'équation différentielle sur $[0,1]$:

$$y'' + 3y' + 2y = e^t$$

Donner les valeurs de y pour les pas $h = 0,1$ et $h = 0,05$.

12. a) Montrer que

$$f : z \longmapsto \frac{z-2i}{z+i}$$

est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
b) On pose $z = x + iy$ et $f(z) = u + iv$. Exprimer x et y en fonction de u et v et inversement.
c) Soient

$$P = \left\{ z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}(z) > \frac{1}{2} \right\}$$

et

$$D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$

Démontrer que la restriction de f à P est une bijection de P sur D.

13. Branches infinies, points doubles de la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x = \dfrac{t-1}{t^2-4} \\ y = \dfrac{t^2-3}{t+2} \end{cases}$$