

PROGRAMME DE COLLES DE LA QUINZAINE N°6

(semaines du 12 au 17 décembre 2005 et du 3 au 7 janvier 2006)

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

- sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme u ,
- endomorphisme induit par u sur un sous-espace vectoriel stable,
- caractérisation matricielle,
- définition d'un endomorphisme trigonalisable,
- définition de $P(u)$ où $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$,
- propriétés de $\begin{pmatrix} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto & P(u) \end{pmatrix}$,
- les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont les $P_0\mathbb{K}[X]$,
- définition de l'ensemble des annulateurs de u ,
- définition du polynôme minimal⁽¹⁾ d'un endomorphisme,
- pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, $P(u)$ commute avec u et $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont stables par u ,
- théorème de décomposition des noyaux : si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux alors $\text{Ker } PQ(u) = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u)$ (hors programme),
- généralisation à un produit de polynômes deux à deux premiers entre eux,
- valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres d'un endomorphisme,
- définition du spectre d'un endomorphisme,
- si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes de u alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe,
- Si $P \in \mathbb{K}[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ valeur propre de u alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$ et de plus $E_\lambda(u) \subset E_{P(\lambda)}(P(u))$,
- en dimension finie, λ valeur propre de u si et seulement si $\det(u - \lambda.Id_E) = 0$,
- valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres d'une matrice,
- matrices semblables (définition + propriétés),
- polynôme caractéristique d'une matrice ($P^M(X)$), d'un endomorphisme ($P^u(X)$),
- nombre de valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme,

1. La notion de polynôme minimal n'est pas explicitement au programme, mais curieusement, il y a toujours la définition de l'idéal des polynômes annulateurs d'un endomorphisme et l'étude de la structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$!!!

- ordre de multiplicité d'une valeur propre d'une matrice ou d'un endomorphisme,
- si F sous-espace vectoriel stable par u et v endomorphisme de F induit par u alors $P^v(X)$ divise $P^u(X)$,
- Théorème de Cayley-Hamilton : $P^u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (admis),
- en dimension finie, on a :

$$u \text{ diagonalisable} \iff E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

$$\iff \text{il existe une base de vecteurs propres de } u$$

$$\iff u \text{ scindé et } \forall \lambda \in \text{Sp}(u), \dim E_\lambda(u) = n_\lambda$$

$$\iff \text{Il existe une base } e \text{ de } E \text{ telle que } \text{Mat}(u, e) \text{ est diagonale}$$

$$\iff \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = n$$

$$\iff \text{le polynôme minimal de } u \text{ est scindé et n'a que des racines simples}$$

$$\iff u \text{ annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.}$$

$$\iff u \text{ annule } \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda).$$

(PREVISIONS POUR LA QUINZAINE 7 :

- dérivation et intégration,)