

PROGRAMME DE COLLES DE LA QUINZAINE N°9

(quinzaine du 20 février au 4 mars 2006)

INTÉGRALES IMPROPRES⁽¹⁾

- **Définition d'une intégrale impropre convergente**: Si f est une application continue par morceaux sur $[a, b[$ l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente, par définition, si $\int_a^x f(t)dt$ a une limite finie lorsque x tend vers b , en restant dans $[a, b[$. Cohérence de la notation avec le cas où I est fermé borné.

- Extension aux intervalles du type $]a, b]$ et $]a, b[$.

- Définition des intégrales divergentes.

- Caractérisation de l'intégrabilité d'une fonction positive continue par morceaux sur un intervalle :

$$\int_I f = \sup \left\{ \int_J f \mid J \text{ segment inclus dans } I \right\}$$

- soit (J_n) une suite croissante de segments telle que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux sur I , alors :

$$f \text{ intégrable sur } I \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f \text{ existe} \quad \text{et dans ce cas} \quad \int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f$$

- linéarité, croissance, additivité de l'intégrale,

- f intégrable sur $I \iff \int_I |f|$ convergente,

- $0 \leq f \leq \varphi$ et φ intégrable sur $I \Rightarrow f$ intégrable sur I ,

- pour $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, on a :

$$f \text{ intégrable sur } [a, b[\iff F \text{ est bornée} \quad \text{où } F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

- fonctions de référence $t \mapsto t^\alpha$, et $t \mapsto (t-a)^\alpha$,

- Comparaison en module à des fonctions réelles du type : $|f| \leq g$ ou $|f| \sim g$.

- Comparaison des fonctions $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ et $x \mapsto \int_a^x g(t)dt$ lorsque : $f = O_b(g)$ ou $f = o_b(g)$ ou $f \sim_b g$ quand g positive non intégrable sur $[a, b[$.

- Comparaison des fonctions $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ et $x \mapsto \int_x^b g(t)dt$ lorsque : $f = O_b(g)$ ou $f = o_b(g)$ ou $f \sim_b g$ quand g positive intégrable sur $[a, b[$.

- Théorème de changement de variable : étant données une fonction f intégrable sur I et une bijection φ d'un intervalle I' sur I , de classe C^1 sur I' , $\int_I f = \int_{I'} f \circ \varphi \cdot |\varphi'|$.

1. Attention : Beaucoup de changements sur les intégrales impropres dans le nouveau programme par rapport à l'ancien programme.

- espace vectoriel $\mathcal{I}(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans \mathbb{K} où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ,
- linéarité, croissance, additivité de l'intégrale sur $\mathcal{I}(I, \mathbb{K})$,
- $\int_I f$ absolument convergente $\iff \int_I |f|$ est convergente,
- $\int_I f$ absolument convergente $\Rightarrow \int_I f$ est convergente,
- $\int_I \bar{f} = \overline{\int_I f}$, $|\int_I f| \leq \int_I |f|$,
- soit (J_n) une suite de segments emboîtés telle que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = I$, alors :

$$f \text{ intégrable sur } I \Rightarrow \int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f$$

- convergence en moyenne et convergence en moyenne quadratique,
- **théorème de convergence dominée** : (f_n) suite de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans \mathbb{C} , $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$. Si $((f_n))$ converge simplement vers f sur I alors f et les f_n sont intégrables sur I et $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$
- **Intégration terme à terme d'une série de fonctions**. Pour (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur I , telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge. Alors f est intégrable sur I et $\int_I f = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.
- **intégrales dépendant d'un paramètre** : continuité de $g : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ dans le cas où f est définie sur $A \times]a, b[$ dans \mathbb{C} telle que $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I , $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A et il existe une fonction $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue positive intégrable sur $]a, b[$ telle que $\forall x \in A, |f(x, \cdot)| \leq \varphi$.
- extension du théorème précédent aux cas de l'existence d'une fonction de domination valable si on se limite à un segment J inclus dans A .
- dérivation sous le signe somme : si f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifient les hypothèses du théorème précédent alors la fonction g est de classe C^1 et $\forall x \in A, g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.
- extension du théorème précédent aux fonctions de classe C^k .

(PREVISIONS POUR LA QUINZAINE 10 :

- séries entières)