

PROGRAMME DE COLLES DE LA QUINZAINE N°3
(semaines du 17 au 21 octobre et 7 au 12 novembre 2005)

Attention : les colles du vendredi 11 novembre sont avancées au 4 novembre.

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

- programme de la quinzaine 2 +
- relation de comparaison sur les fonctions en un point (on compare par rapport à une fonction réelle strictement positive sur le domaine de définition),
- caractérisation des applications continues sur E par les images réciproques des ouverts (et des fermés),
- continuité d'une application linéaire $u : E \rightarrow F$ ($\iff u$ continuité en 0 $\iff u$ bornée sur la boule unité $\iff u$ bornée sur la sphère unité $\iff u$ lipschitzienne),
- en dimension finie toute application linéaire est continue,
- définition de la norme associée sur $\mathcal{L}(E, F)$,
remarque: la notion de compact n'est vue qu'en dimension finie,
- définition des compacts en dimension finie = parties fermées bornées,
- toute suite à valeurs dans un compact K admet une sous-suite qui converge dans K ,
- l'image de tout compact par une application continue est un compact,
- toute fonction à valeurs réelles continue $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sur un compact A est bornée et atteint ses bornes,
- définition d'espace vectoriel normé complet,
- les espaces vectoriels normés de dimension finie sont complets,

SUITES ET SÉRIES

- suites et séries de réels ou de complexes.
- suite des sommes partielles d'une série $\sum u_n$
- \sum fonction série et Δ fonction différence,
- série convergente, somme d'une série convergente,
- l'ensemble des séries convergentes est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}),
- critère de Cauchy pour les séries,
- théorème de regroupement des termes d'une série,
- théorème de convergence des séries alternées,
- critère de convergence des séries de nombres réels positifs,
- si (u_n) et (α_n) suites de réels positifs et $(u_n) = O(\alpha_n)$ on a $\sum \alpha_n$ convergente $\Rightarrow \sum u_n$ convergente,
- théorème de comparaison avec une intégrale : $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positive décroissante on a :

$$\int_a^{+\infty} f \text{ existe } \iff \sum f(a+n) \text{ convergente,}$$

- séries de Riemann, séries de Bertrand,

- développement décimal d'un réel,
- critère de convergence de d'Alembert,
- si (u_n) et (v_n) suites de réels positifs et $(u_n) \sim (v_n)$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, de plus :
 - si $\sum v_n$ diverge alors $(\sum u_n) \sim (\sum v_n)$
 - si $\sum v_n$ converge alors $\left(\sum_{n+1}^{+\infty} u_k\right) \sim \left(\sum_{n+1}^{+\infty} v_k\right)$
- si (u_n) et (v_n) suites de réels positifs, $\sum v_n$ convergente et $(u_n) = o(v_n)$ alors $\sum_{n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{n+1}^{+\infty} v_k\right)$,
- séries absolument convergentes,
- série géométrique complexe,
- série produit, convergence de la série produit de deux séries absolument convergentes,
- série exponentielle : $\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$,
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$,
- transformation d'Abel (méthode vue en cours mais résultat hors programme),

(PREVISIONS POUR LA QUINZAINE 4 :

- déterminants,)